
TD de topologie
Licence 1977-78 à l'université de NICE (Valrose)
Etudiant : D.-J. Mercier
TD TOPOLOGIE
année 77-78

Résultats scolaires en Mathématique :

Bac : juin 75
Deug A option maths : juin 77 mention TB

Maîtrise

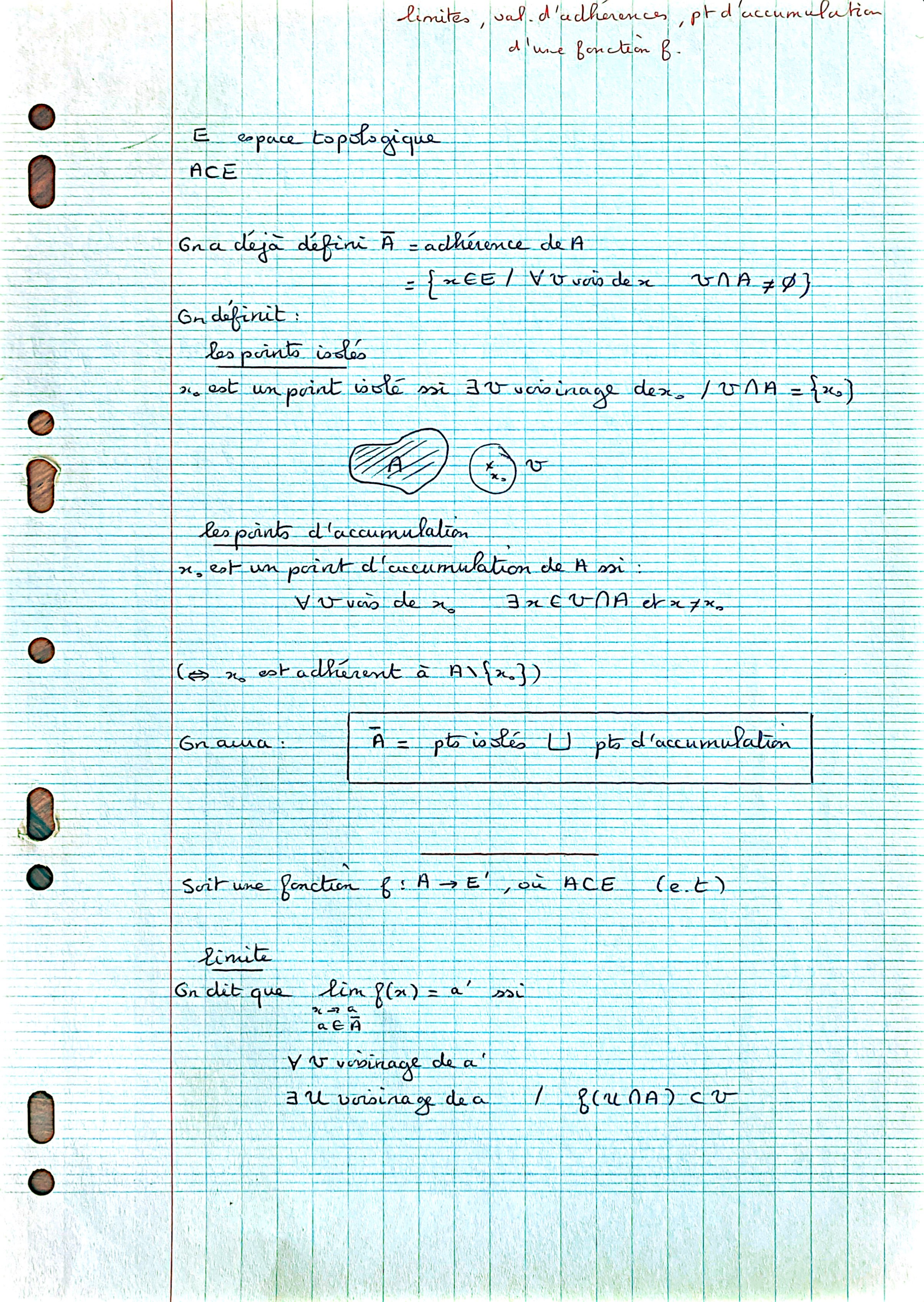
• Année 77-78 : C1 - C2 juin 78

notes aux partiels :	P_1	P_2	E	admission
(C1) topologie	14	16	16	TB
calcul diff.	17,5	16	15	TB
(C2) Intégration	20	16,5	?	TB
Distribution	13	19	14	B

• Année 78-79 : C3 - C4

notes aux partiels :	P_1	P_2	E	admission
(C3) géométrie				
algèbre				
(C4) prépa. agrég.				
géom. alg.				

prépa. capes



limites, val. d'adhérences, pt d'accumulation d'une fonction f.

E espace topologique

$A \subset E$

On a déjà défini $\overline{A}$ = adhérence de A

$= \{x \in E \,/\, \forall v$ vois de $x \quad v \cap A \neq \emptyset\}$

On définit :

<u>les points isolés</u>

x_0 est un point isolé ssi $\exists v$ voisinage de x_0 / $v \cap A = \{x_0\}$

<u>les points d'accumulation</u>

x_0 est un point d'accumulation de A ssi :

$\forall v$ vois de $x_0 \quad \exists x \in v \cap A$ et $x \neq x_0$

($\Leftrightarrow x_0$ est adhérent à $A \setminus \{x_0\}$)

On aura : $\boxed{\overline{A} = \text{pts isolés} \sqcup \text{pts d'accumulation}}$

Soit une fonction $f : A \to E'$, où $A \subset E$ (e.t)

<u>limite</u>

On dit que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ a \in \overline{A}}} f(x) = a'$ ssi

$\forall v$ voisinage de a'

$\exists \mathcal{U}$ voisinage de a / $f(\mathcal{U} \cap A) \subset v$

valeur d'adhérence

On dit que a' est valeur d'adhérence de f quand $x \to a$ ssi :

$\forall V'$ vois de a'

$\forall V$ vois de a $\quad \exists x \in V \cap A \ / \ f(x) \in V'$

point d'accumulation

On dit que a' est point d'accumulation de f quand $x \to a$ quand :

$\forall V'$ vois de a'

$\forall V$ vois de a $\quad \exists x \in V \cap A$

$\quad$ et $x \neq a \ / \ f(x) \in V'$

Adaptation aux suites.

I. M. S. P
77-78

C 1 Topologie
Feuille n° 1

× (I) Soient (E, d) un espace métrique et $\emptyset \neq A \subset E$.
Montrer que :
$\forall x, y \in E \qquad |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$

× (II) Soit $\mathbb{R}^n$ muni de sa norme euclidienne et soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer que $A \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n} \|A(e_i)\|^2\right)^{1/2}$ définit une norme sur End $(\mathbb{R}^n)$

2) Montrer qu'il en est de même pour l'application
$$A \longmapsto \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|$$

3) Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

× (III) Inégalités de Hölder et de Minkowski

1) Soient a et b 2 nombres réels positifs et α et β 2 nombres réels strictement positifs et tels que $\alpha + \beta = 1$.
Montrer, en utilisant la concavité de la fonction $x \mapsto \log x$, que l'on a $\quad a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$.

2) Soit p un nombre réel strictement supérieur à 1 et soit $q = \dfrac{p}{p-1}$. Soient $x_1, \dots, x_N$ et $y_1, \dots, y_N$ des nombres complexes.
En utilisant 1) pour $a_k = \dfrac{|x_k|^p}{\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p}$, $b_k = \dfrac{|y_k|^q}{\sum_{n=1}^{N} |y_n|^q}$

$\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$, $1 \leq k \leq N$, montrer l'inégalité de Hölder (ou de Schwartz si $p = q = 2$) :

Hölder $$\sum_{n=1}^{N} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^q\right)^{1/q}$$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

En remarquant que $|x_n+y_n|^p \leq |x_n+y_n|^{p-1}|x_n| + |x_n+y_n|^{p-1}|y_n|$ en déduire l'inégalité de Minkowski :

Minkowski $$\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n+y_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^p\right)^{1/p}.$$

3) Pour $1 \leq p < +\infty$, soit $l^p = \{ x = (x_k)_k : \forall k \; x_k \in \mathbb{C} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty \}$

Montrer que l^p est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur l^p.

Montrer que, pour $q \geq p$, on a l'inclusion $l^p \subset l^q$ et que, pour $x \in l^p$, $\|x\|_q \leq \|x\|_p$.

4) Soient f et $g \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$ $(I = [0,1])$.

En reprenant les notations et la méthode de 2) montrer

Hölder que : $$\int_I |fg| \leq \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_I |g|^q\right)^{1/q} \quad \text{(Hölder)}$$

Minkowski et $$\left(\int_I |f+g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_I |g|^p\right)^{1/p} \quad \text{(Minkowski)}.$$

En déduire que, pour $1 \leq p < +\infty$, $\|f\|_p = \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$ et montrer que, pour $q \geq p$, $\|f\|_q \geq \|f\|_p$.

× (IV) Montrer que l^∞ et l^p $(1 \leq p < +\infty)$ sont des espaces de Banach.

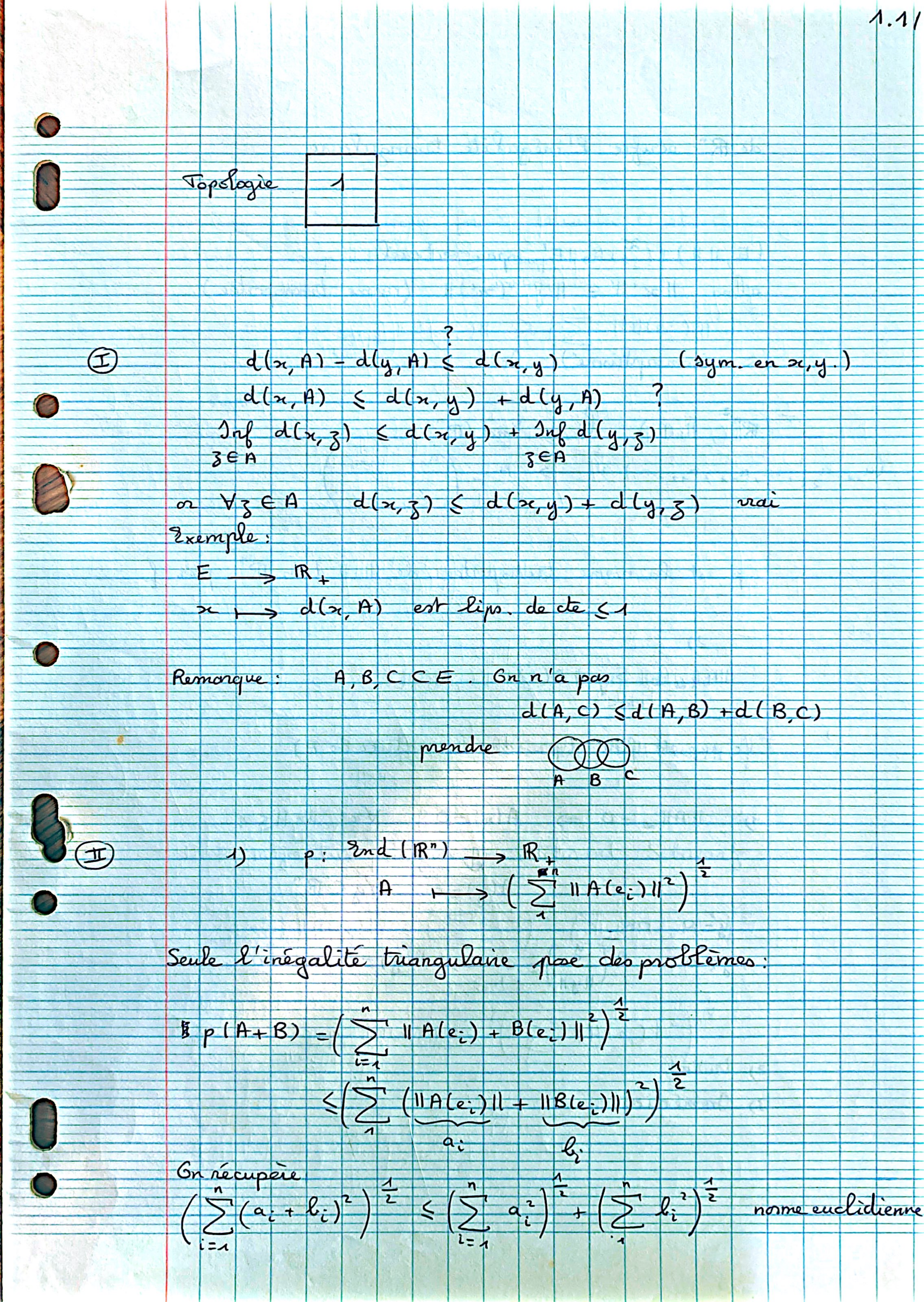
× (V) Montrer que $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$ n'est pas un espace de Banach pour la norme $\|f\|_1 = \int_I |f(t)|\,dt$. Pour cela, on pourra considérer, pour $n \geq 3$, les fonctions $f_n \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$ définies par

$f_n(t) = 1 \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \qquad f_n(t) = 0 \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \leq t \leq 1$

$f_n(t) = \alpha_n t + \beta_n$ dans l'intervalle $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)$.

En déduire que $\| \;\|_1$ n'est pas équivalente à $\| \;\|_\infty$ (norme de la convergence uniforme).

Peut-on refaire cet exercice avec la norme $\|f\|_2 = \left(\int_I |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$



Topologie [1]

(I)

$$d(x,A) - d(y,A) \overset{?}{\leq} d(x,y) \qquad \text{(sym. en } x,y.)$$

$$d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A) \quad ?$$

$$\operatorname{Inf}_{z\in A} d(x,z) \leq d(x,y) + \operatorname{Inf}_{z\in A} d(y,z)$$

or $\forall z \in A \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ vrai

Exemple :

$$E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto d(x,A) \text{ est lips. de cte } \leq 1$$

Remarque : $A, B, C \subset E$. On n'a pas $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$

prendre

(II)

1) $p : \operatorname{End}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$A \longmapsto \left(\sum_1^n \|A(e_i)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

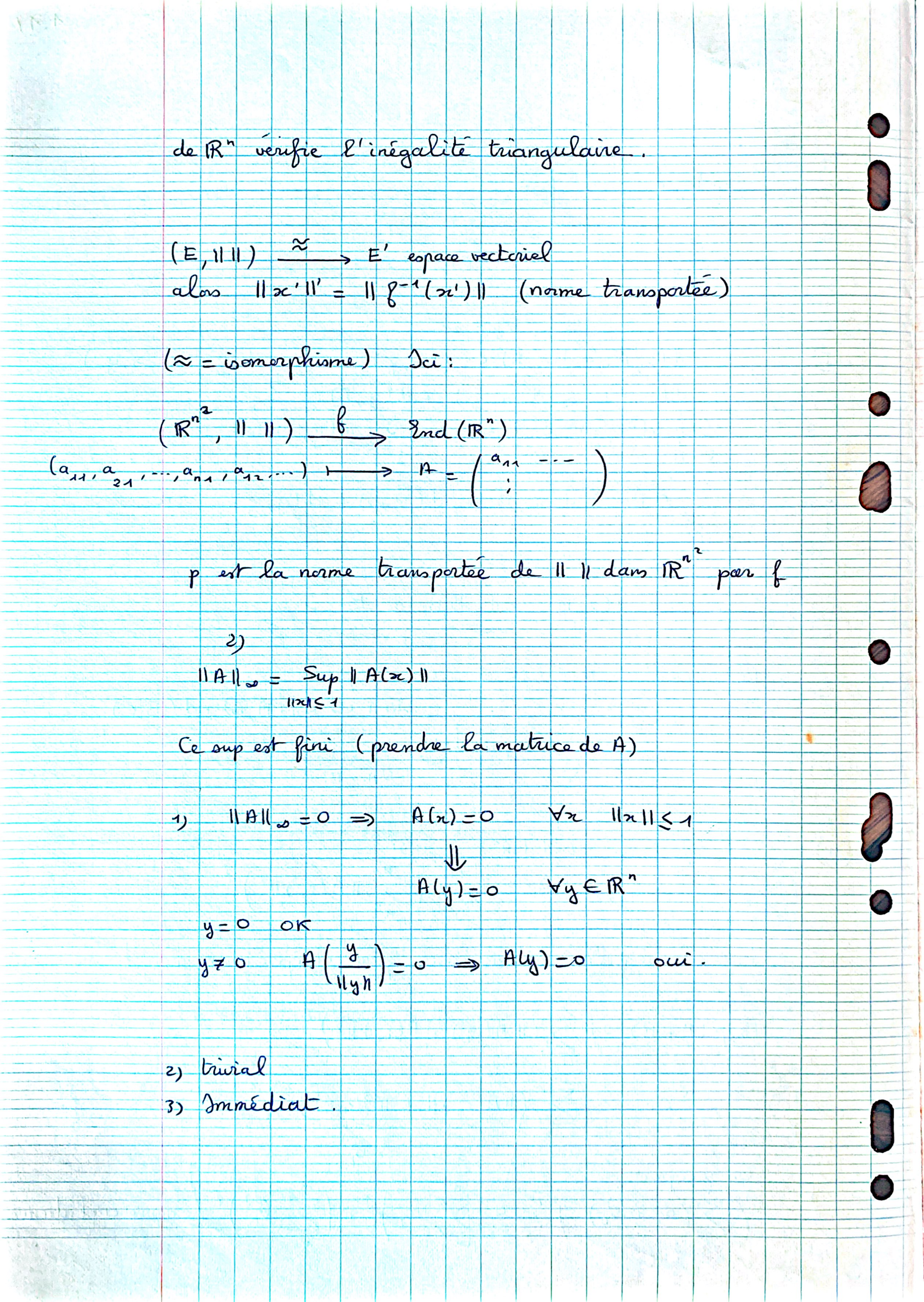
Seule l'inégalité triangulaire pose des problèmes :

$$p(A+B) = \left(\sum_{i=1}^n \|A(e_i) + B(e_i)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_1^n (\underbrace{\|A(e_i)\|}_{a_i} + \underbrace{\|B(e_i)\|}_{b_i})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

On récupère

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_1^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{norme euclidienne}$$



de $\mathbb{R}^n$ vérifie l'inégalité triangulaire.

$(E, \|\ \|) \xrightarrow{\approx} E'$ espace vectoriel

alors $\|x'\|' = \|f^{-1}(x')\|$ (norme transportée)

($\approx$ = isomorphisme) Ici :

$$(\mathbb{R}^{n^2}, \|\ \|) \xrightarrow{f} \mathcal{E}nd(\mathbb{R}^n)$$

$$(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}, a_{12}, \dots) \longmapsto A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

p est la norme transportée de $\|\ \|$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$ par f

2)

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|$$

Ce sup est fini (prendre la matrice de A)

1) $\|A\|_\infty = 0 \Rightarrow A(x) = 0 \quad \forall x \quad \|x\| \leq 1$

$$\Downarrow$$

$$A(y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$y = 0$ OK

$y \neq 0 \quad A\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = 0 \Rightarrow A(y) = 0$ oui.

2) trivial

3) Immédiat.

3)

* $\forall i \quad e_i \in$ disque fermé de centre 0 et de rayon 1

donc $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\| \geq \sup\limits_{i=1,\dots,n} \|A(e_i)\|$

et $n \sup\limits_{1 \leq i \leq n} \|A(e_i)\| \geq \left(\sum_1^n \|A(e_i)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

donc

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\| \geq \frac{1}{n}\left(\sum_1^n \|A(e_i)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(et m̂ ~~En~~ $1/\sqrt{n}$ au lieu de $1/n$)

* $x = \sum x_i e_i$

$A(x) = \sum x_i \, A(e_i)$

$\|A(x)\| \leq \sum_1^n \|A(e_i)\| \leq n \sup \|A(e_i)\|$

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\| \leq n\left(\sum_{i=1}^n \|A(e_i)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

. Autre majoration plus fine, en utilisant Schwartz :

$$\sum_i |x_i| \, \|A(e_i)\| \leq \underbrace{\left(\sum x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq 1} \left(\sum \|A(e_i)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|A(e_i)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

III

1)

a et $b \in \mathbb{R}_+^*$

$\ln(a^\alpha b^\beta) = \alpha \ln a + \beta \ln b \leq \ln(\alpha a + \beta b)$

eu égard à la concavité de la fonction logarithme népérien.

CQFD

2)

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

En utilisant le 1) :

$$\left(\frac{|x_k|^p}{\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|y_k|^q}{\sum_{n=1}^{N} |y_n|^q}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{\sum_{1}^{N} |x_n|^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|^q}{\sum_{n=1}^{N} |y_n|^q}$$

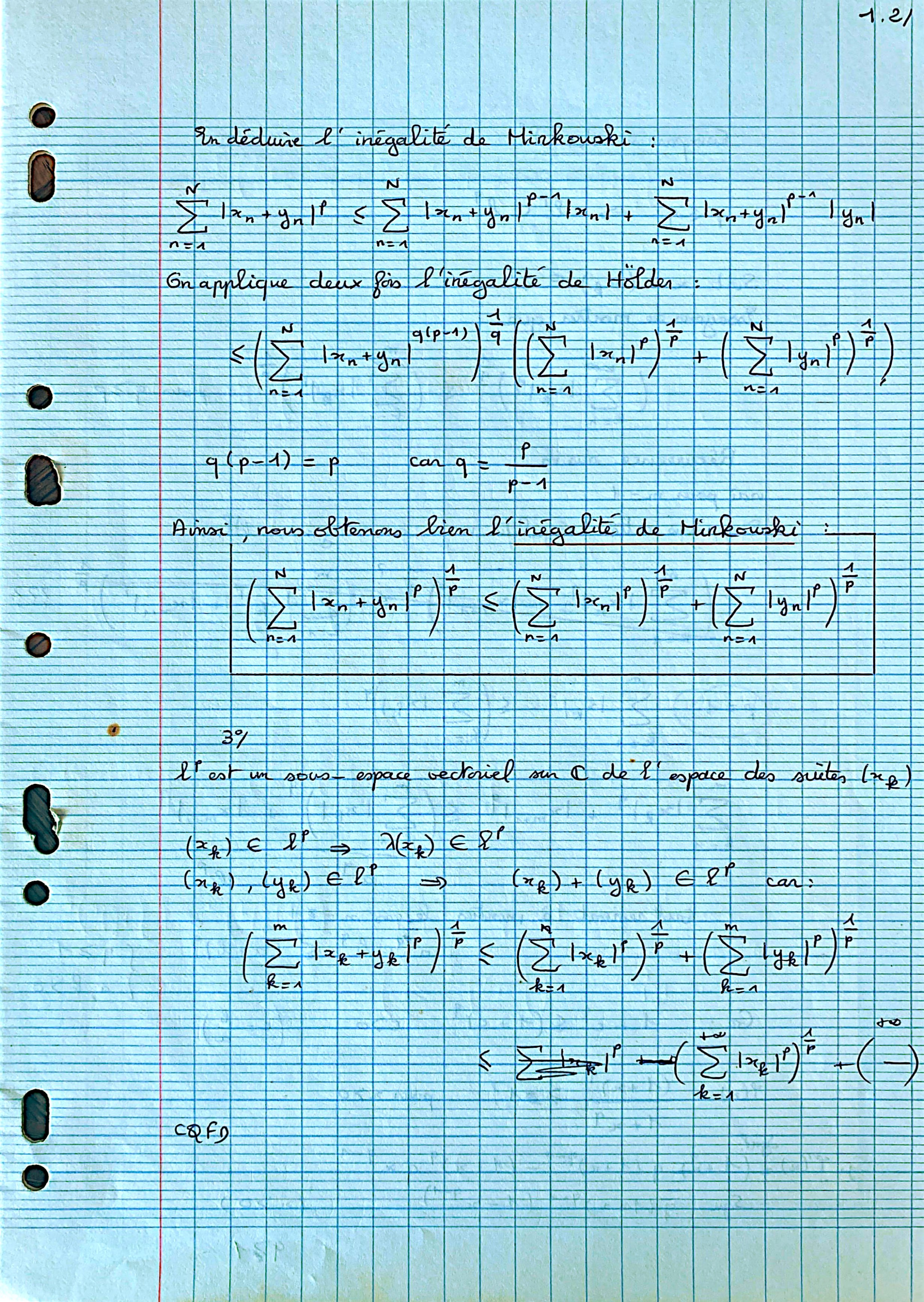
Ceci pour $k = 1, \dots, N$. En sommant sur k :

$$\frac{\sum |x_k||y_k|}{\left(\sum |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1$$

d'où la relation de Hölder :

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$



En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n+y_n|^p \leq \sum_{n=1}^{N} |x_n+y_n|^{p-1}|x_n| + \sum_{n=1}^{N} |x_n+y_n|^{p-1}|y_n|$$

On applique deux fois l'inégalité de Hölder :

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n+y_n|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right),$$

$$q(p-1) = p \qquad \text{car } q = \frac{p}{p-1}$$

Ainsi, nous obtenons bien l'inégalité de Minkowski :

$$\boxed{\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$$

3°/

ℓ^p est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de l'espace des suites (x_k)

$(x_k) \in \ell^p \Rightarrow \lambda(x_k) \in \ell^p$

$(x_k), (y_k) \in \ell^p \Longrightarrow (x_k)+(y_k) \in \ell^p$ car :

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\quad \right)^{+\infty}$$

CQFD

Comparaison des ℓ^p

Comparaison des ℓ^p ($p \in \mathbb{N}$)

On veut montrer que $\ell^p \subset \ell^q$ dès que $q \geqslant p$. (C'est un résultat du cours d'intégration. cf chap 5, à savoir que $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^\infty$)

Soit $x \in \ell^p$. Tout revient à montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad q \geqslant p$$

Par récurrence sur m.

* vrai pour $m = 1$
* Supposons que l'inégalité soit vraie au rang m.

Si $p = 1$, on doit montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} |x_k|^q \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m+1} |x_k|\right)^q$???

Or ~~c.à.d~~ que :

$$\sum_{k=1}^{m} |x_k|^q + |x_{m+1}|^q \underbrace{\leqslant}_{\text{(récurrence)}} \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{m} |x_k|}_{a}\Big)^q + \underbrace{|x_{m+1}|}_{b}{}^q$$

Il nous faut donc montrer que $a^q + b^q \leqslant (a+b)^q$ pour $q \geqslant 1$, $a, b > 0$

Cela est facile : $c = \frac{b}{a} > 0 \qquad 1 + c^q \leqslant (1+c)^q$

Posons $\varphi(x) = 1 + x^q - (1+x)^q$

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= q x^{q-1} - q(1+x)^{q-1} \\ &= q\left[x^{q-1} - (1+x)^{q-1}\right] \\ &= q(-1)\left(x^{q-2} + x^{q-3}(1+x) + \dots + (1+x)^{q-2}\right)\end{aligned}$$

$\varphi'(x) \leqslant 0 \quad \forall x > 0$.

Donc, puisque $x > 0$ et $\varphi(0) = 0$, on aura $\varphi(x) \leqslant 0 \quad \forall x > 0$.

$q \geqslant 1$

Si $p \neq 1$, on se ramène au cas précédent en posant

$$y_k = |x_k|^p$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \iff \left(\sum_{k=1}^{m} y_k^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} y_k\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\iff \left(\sum_{k=1}^{m} y_k^r\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{m} y_k\right)^r$$

où $r = \frac{q}{p} \geq 1$

o p

~~Alors $\left(\sum_{1}^{m} y_k^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \sum_{1}^{m} y_k$~~

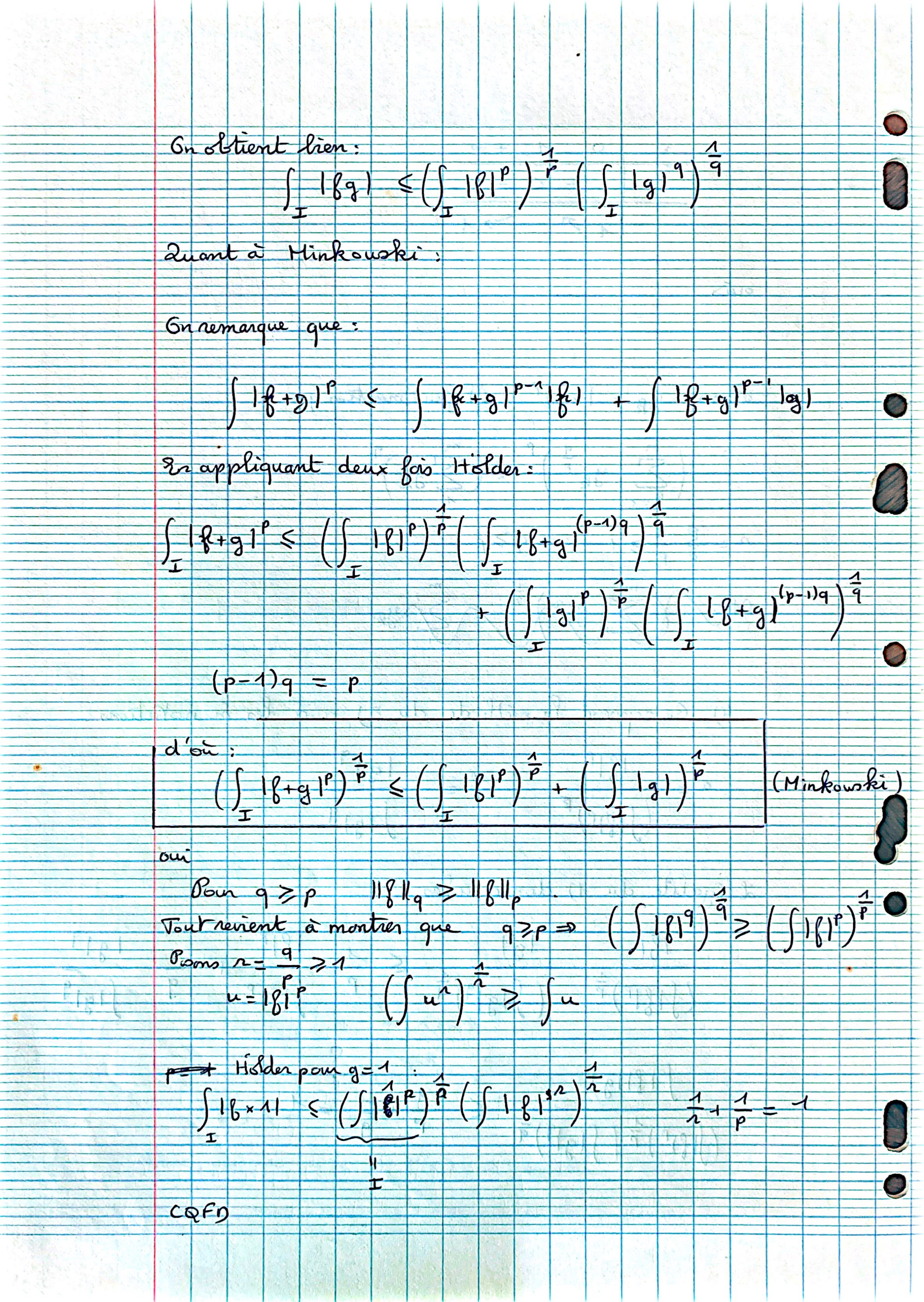
4) On reprend la méthode du 2) avec les m̂ notations.

$$a = \frac{|f|^p}{\left(\int |f|^p\right)} \qquad b = \frac{|g|^q}{\int |g|^q}$$

L'égalité du 1) donne alors :

$$\frac{|f|}{\left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|g|}{\left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\int |f|^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\int |g|^q}$$

$$\frac{\int |f||g|}{\left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$



On obtient bien :

$$\int_I |fg| \leq \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Quant à Minkowski :

On remarque que :

$$\int |f+g|^p \leq \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g|$$

En appliquant deux fois Hölder :

$$\int_I |f+g|^p \leq \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_I |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$(p-1)q = p$$

d'où :

$$\left(\int_I |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I |g|\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(Minkowski)}$$

oui

Pour $q \geq p$ $\quad \|f\|_q \geq \|f\|_p$

Tout revient à montrer que $q \geq p \Rightarrow \left(\int |f|^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

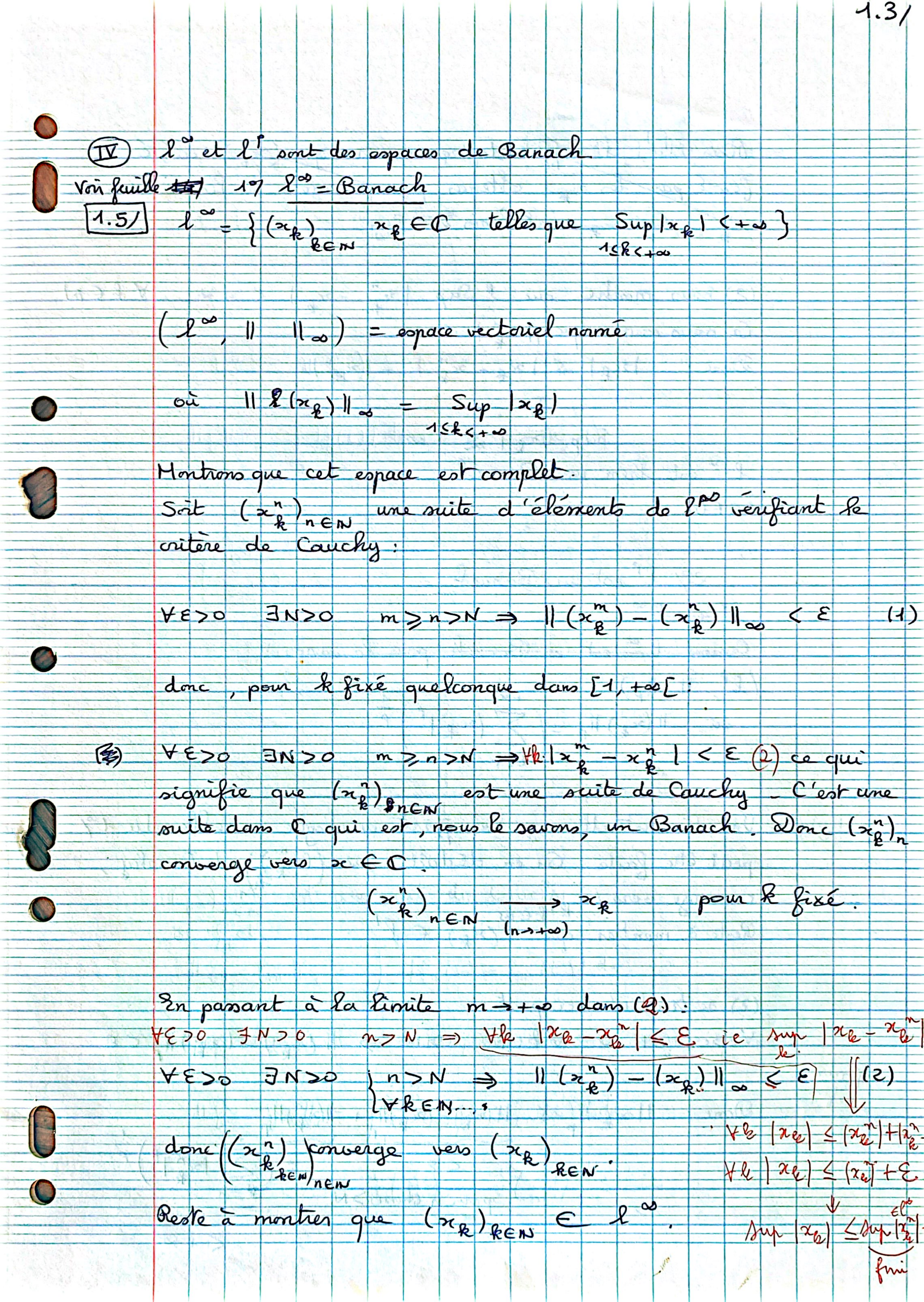
Posons $r = \frac{q}{p} \geq 1$

$u = |f|^p \qquad \left(\int u^r\right)^{\frac{1}{r}} \geq \int u$

~~p=1~~ Hölder pour $g=1$:

$$\int_I |f \times 1| \leq \underbrace{\left(\int |1|^p\right)^{\frac{1}{p}}}_{= I} \left(\int |f|^{r}\right)^{\frac{1}{r}} \qquad \frac{1}{r} + \frac{1}{p} = 1$$

CQFD



IV ℓ^∞ et ℓ^1 sont des espaces de Banach

Voir feuille 1.5/

1°) ℓ^∞ = Banach

$$\ell^\infty = \left\{ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \quad x_k \in \mathbb{C} \quad \text{telles que} \quad \sup_{1\leq k<+\infty} |x_k| < +\infty \right\}$$

$(\ell^\infty, \| \ \|_\infty)$ = espace vectoriel normé

$$\text{où} \quad \| (x_k) \|_\infty = \sup_{1\leq k<+\infty} |x_k|$$

Montrons que cet espace est complet.

Soit $(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de ℓ^∞ vérifiant le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad m \geqslant n > N \Rightarrow \| (x_k^m) - (x_k^n) \|_\infty < \varepsilon \qquad (1)$$

donc, pour k fixé quelconque dans $[1, +\infty[$:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad m \geqslant n > N \Rightarrow \forall k \ |x_k^m - x_k^n| < \varepsilon$ (2) ce qui signifie que $(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. C'est une suite dans $\mathbb{C}$ qui est, nous le savons, un Banach. Donc $(x_k^n)_n$ converge vers $x \in \mathbb{C}$.

$$(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} x_k \quad \text{pour } k \text{ fixé.}$$

En passant à la limite $m \to +\infty$ dans (2) :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad n > N \Rightarrow \forall k \ |x_k - x_k^n| \leq \varepsilon$ i.e. $\sup_k |x_k - x_k^n|$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \begin{cases} n > N \\ \forall k \in \mathbb{N} \ldots \end{cases} \Rightarrow \| (x_k^n) - (x_k) \|_\infty \leq \varepsilon$$

(2) $\Downarrow$

$\forall k \ |x_k| \leq |x_k^n| + |x_k^n - x_k|$

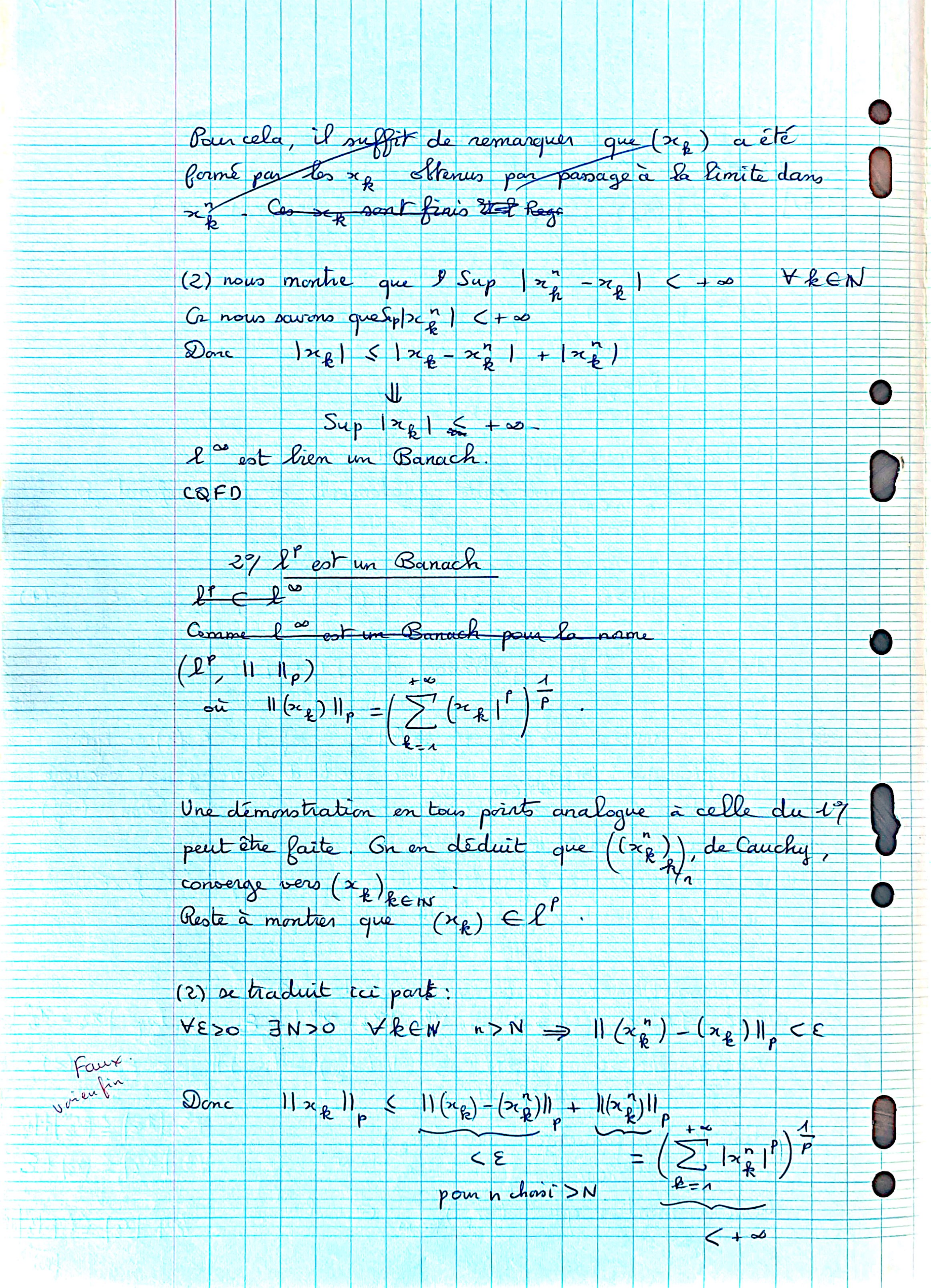
$\forall k \ |x_k| \leq |x_k^n| + \varepsilon$

$\Downarrow$

$\sup |x_k| \leq \underbrace{\sup |x_k^n|}_{\text{fini}} + \varepsilon$ ($\in \ell^\infty$)

donc $\left((x_k^n)_{k\in\mathbb{N}} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Reste à montrer que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.



Pour cela, il suffit de remarquer que (x_k) a été formé par les x_k obtenus par passage à la limite dans x_k^n. ~~Ces x_k sont finis et Reg~~

(2) nous montre que $\sup |x_k^n - x_k| < +\infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Or nous savons que $\sup_p |x_k^n| < +\infty$

Donc $\quad |x_k| \leq |x_k - x_k^n| + |x_k^n|$

$$\Downarrow$$

$$\sup |x_k| < +\infty .$$

ℓ^∞ est bien un Banach.

CQFD

2°/ ℓ^p est un Banach

~~$\ell^p \subset \ell^\infty$~~

~~Comme ℓ^∞ est un Banach pour la norme~~

$(\ell^p, \| \ \|_p)$

où $\quad \|(x_k)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Une démonstration en tous points analogue à celle du 1°/ peut être faite. On en déduit que $\left((x_k^n)_k\right)_n$, de Cauchy, converge vers $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Reste à montrer que $\quad (x_k) \in \ell^p$.

(2) se traduit ici par :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad n > N \Rightarrow \|(x_k^n) - (x_k)\|_p < \varepsilon$

Faux. voir en fin

Donc $\quad \|x_k\|_p \leq \underbrace{\|(x_k) - (x_k^n)\|_p}_{< \varepsilon} + \underbrace{\|(x_k^n)\|_p}_{= \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k^n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty}$

pour n choisi $> N$

Par conséquent : $\|x_k\|_p = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$

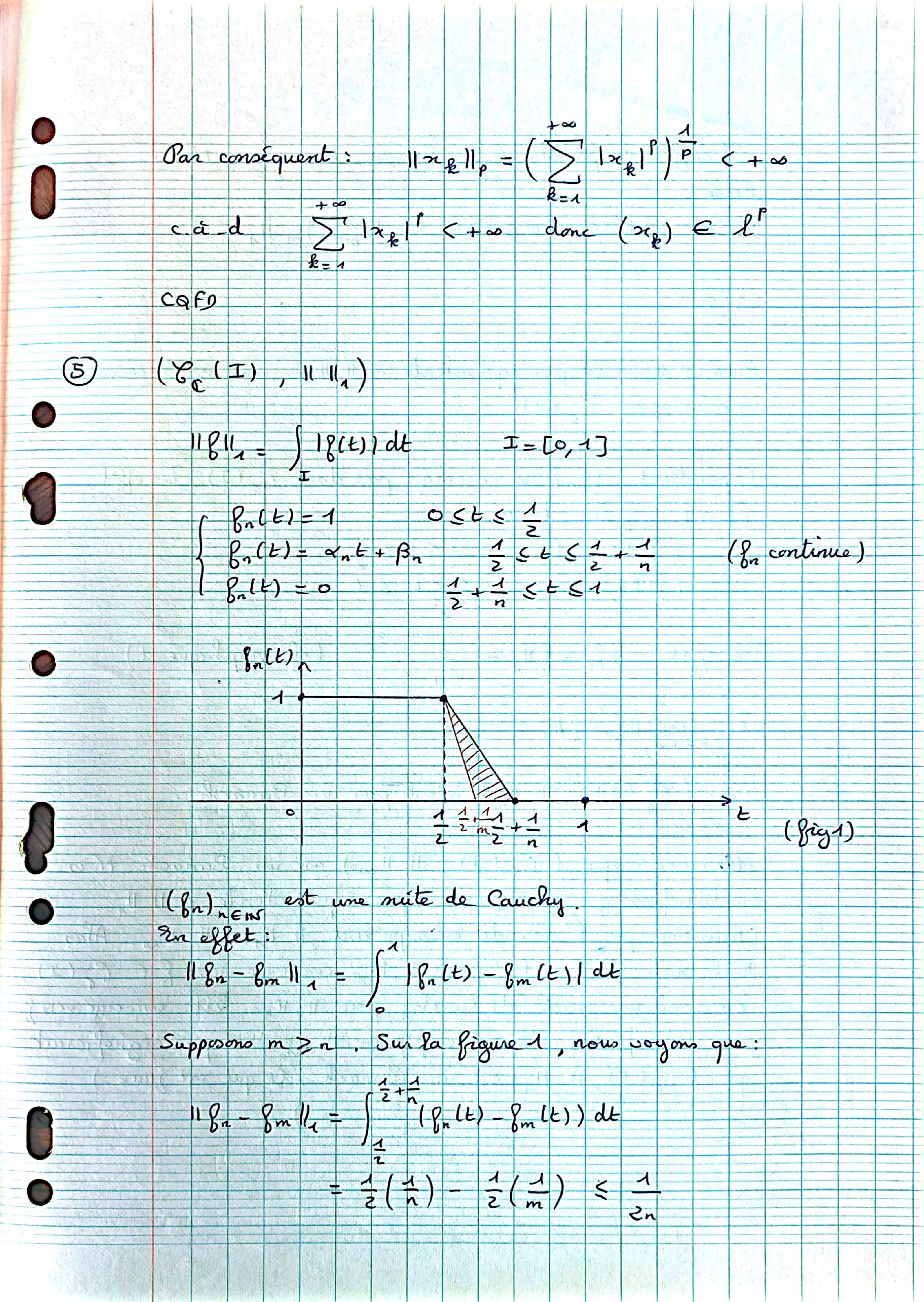
c.à.d $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty$ donc $(x_k) \in \ell^p$

CQFD

⑤ $(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I), \| \|_1)$

$$\|f\|_1 = \int_I |f(t)|\, dt \qquad I = [0, 1]$$

$$\begin{cases} f_n(t) = 1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_n(t) = \alpha_n t + \beta_n & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ f_n(t) = 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad (f_n \text{ continue})$$



(fig1)

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
En effet :

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\, dt$$

Supposons $m \geq n$. Sur la figure 1, nous voyons que :

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} (f_n(t) - f_m(t))\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right) \leq \frac{1}{2n}$$

Il suffira de prendre $\frac{1}{2n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{2\varepsilon} = N$

Ainsi

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad m \geqslant n > N \implies \| f_n - f_m \|_1 < \varepsilon$

CQFD

~~Ainsi $\| \ \|_1$ n'est pas équivalente à $\| \ \|_\infty$, car nous avons vu en cours que $\mathcal{C}_\mathbb{C}(I)$~~

Cependant (f_n) ne converge pas dans $\mathcal{C}_\mathbb{C}(I)$. En effet, $f_n \to f$ $\quad f$ discontinue

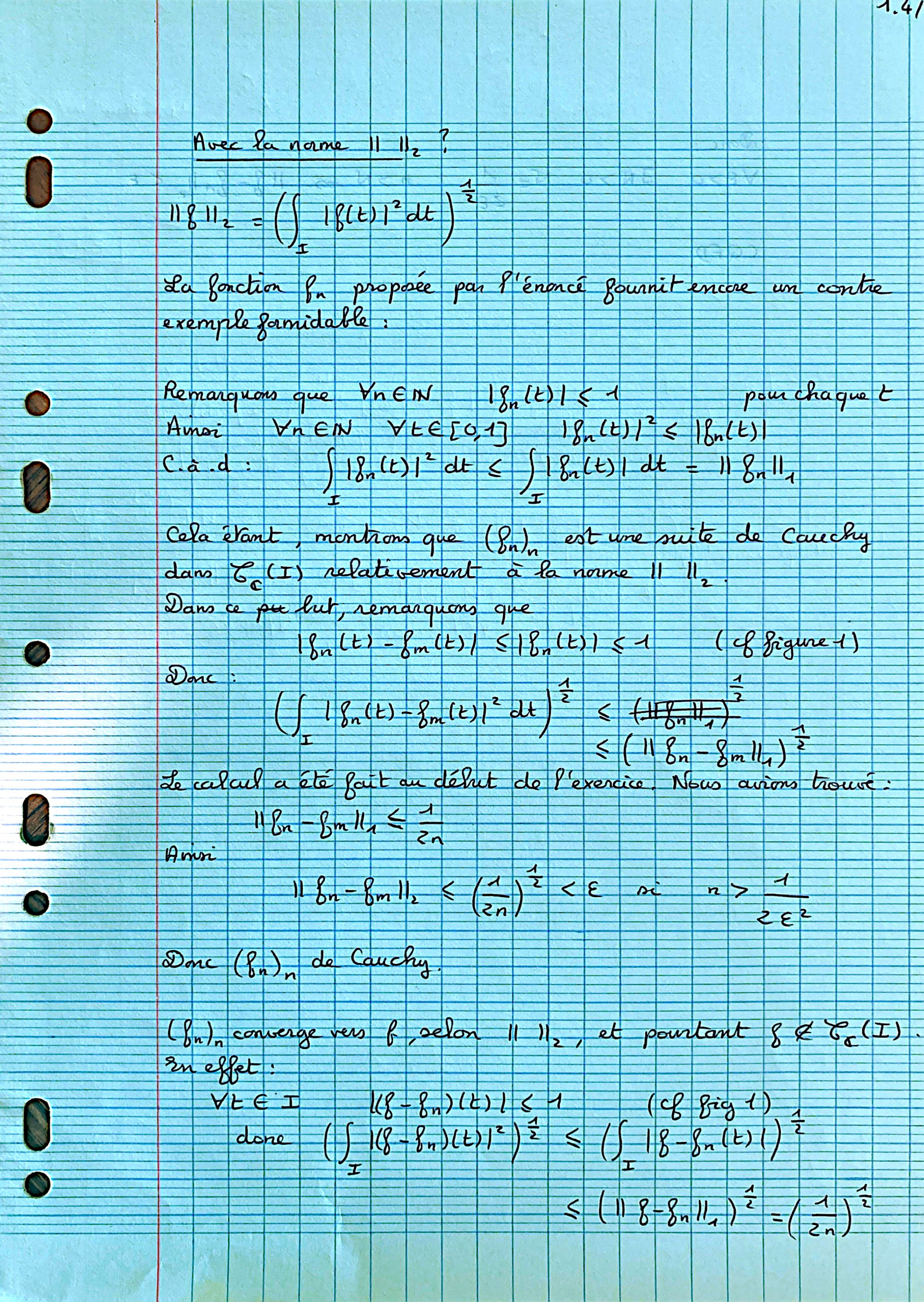
$$\begin{cases} f(t) = 1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(t) = 0 & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

En effet $\| f_n - f \|_1 = \frac{1}{2n}$ (cf graphique 1)

et $\lim_{n \to +\infty} \| f_n - f \|_1 = 0$.

Donc $(\mathcal{C}_\mathbb{C}(I), \| \ \|_1)$ n'est pas un Banach.

Nous savons que $(\mathcal{C}_\mathbb{C}(I), \| \ \|_\infty)$ est un Banach. Nous en déduisons que $\| \ \|_\infty$ n'est pas équivalente à $\| \ \|_1$.
(Raisonner par l'absurde en supposant $\| \ \|_1 \sim \| \ \|_\infty$. Alors toute suite de Cauchy pour $\| \ \|_\infty$ converge vers $f \in \mathcal{C}_\mathbb{C}(I)$, et est aussi une suite de Cauchy pour $\| \ \|_1$. Elle converge vers f pour $\| \ \|_\infty$ donc aussi vers f pour $\| \ \|_1$, ce qui signifierait que $(\mathcal{C}_\mathbb{C}(I), \| \ \|_1)$ est un Banach. Ce qui est faux.)



<u>Avec la norme $\| \ \|_2$</u> ?

$$\|f\|_2 = \left(\int_I |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

La fonction f_n proposée par l'énoncé fournit encore un contre exemple formidable :

Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(t)| \leq 1$ pour chaque t

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1] \quad |f_n(t)|^2 \leq |f_n(t)|$

C.à.d : $\displaystyle\int_I |f_n(t)|^2 dt \leq \int_I |f_n(t)| \, dt = \|f_n\|_1$

Cela étant, montrons que $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}_\mathbb{C}(I)$ relativement à la norme $\| \ \|_2$.

Dans ce ~~pt~~ but, remarquons que

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq |f_n(t)| \leq 1 \qquad (\text{cf figure } 1)$$

Donc :

$$\left(\int_I |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq ~~(\|f_n\|_1)^{\frac{1}{2}}~~$$
$$\leq (\|f_n - f_m\|_1)^{\frac{1}{2}}$$

Le calcul a été fait au début de l'exercice. Nous avions trouvé :

$$\|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{1}{2n}$$

Ainsi

$$\|f_n - f_m\|_2 \leq \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad \text{si} \quad n > \frac{1}{2\varepsilon^2}$$

Donc $(f_n)_n$ de Cauchy.

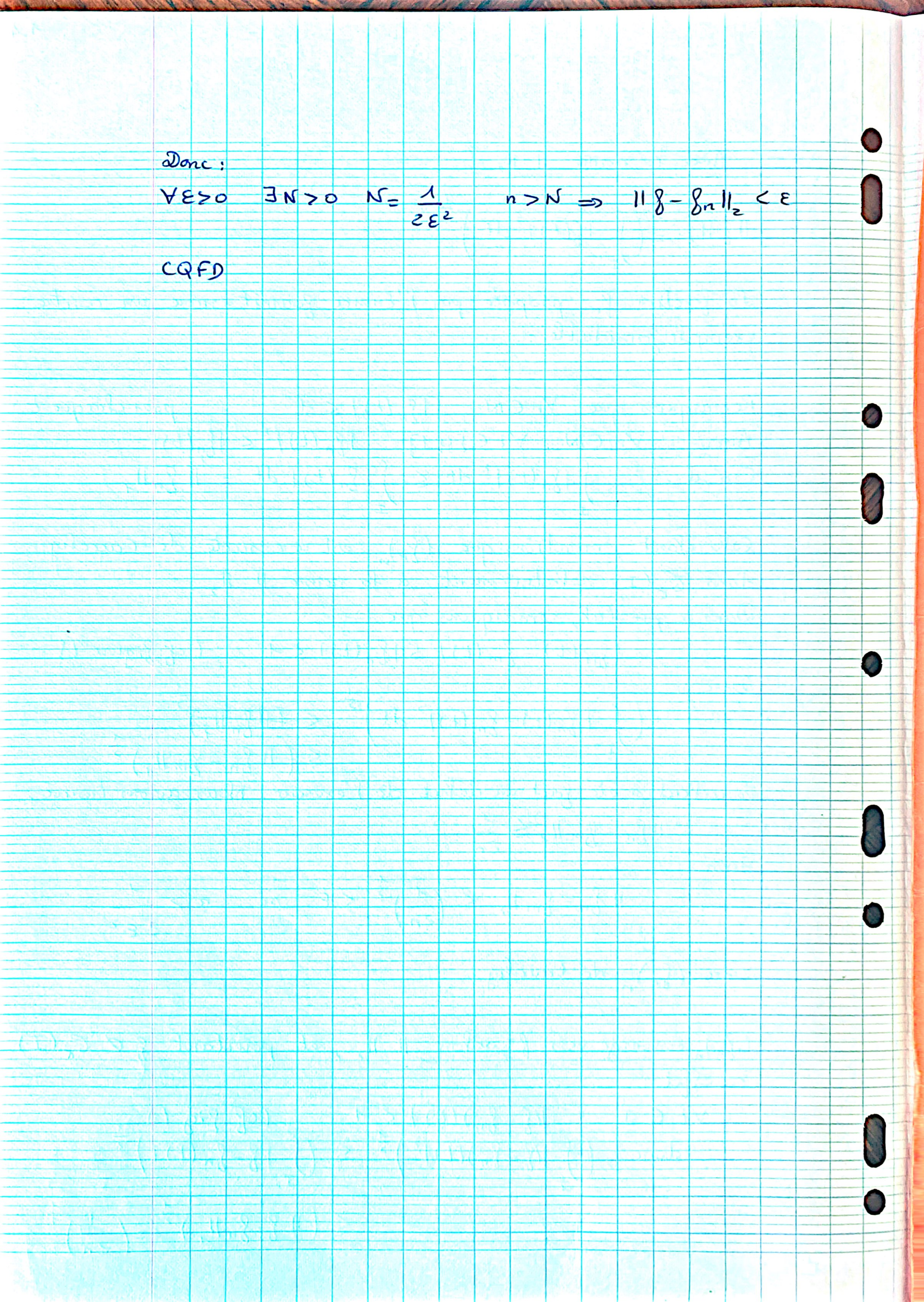
$(f_n)_n$ converge vers f, selon $\| \ \|_2$, et pourtant $f \notin \mathcal{C}_\mathbb{C}(I)$.

En effet :

$$\forall t \in I \qquad |(f - f_n)(t)| \leq 1 \qquad (\text{cf fig } 1)$$

donc $\displaystyle\left(\int_I |(f - f_n)(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_I |f - f_n(t)| \right)^{\frac{1}{2}}$

$$\leq (\|f - f_n\|_1)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}$$



Donc :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad N = \frac{1}{2\varepsilon^2} \qquad n > N \Rightarrow \| f - f_n \|_2 < \varepsilon$

CQFD

⑤ ℓ^∞ et ℓ^p sont des espaces de Banach

1°/ ℓ^∞ = Banach (pour la norme $\|\ \|_\infty$)

On rappelle que $\ell^\infty = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \quad x_k \in \mathbb{C} \ / \ \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty\}$

et que $\|(x_k)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$

$(\ell^\infty, \|\ \|_\infty)$ est un e.v.n. Montrons qu'il est complet.

Soit $x^n \in \ell^\infty$ une suite d'éléments de ℓ^∞ qui est de Cauchy.

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N \quad p>n>N \Rightarrow \|x^p - x^n\| < \varepsilon,$$

c.à.d :

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N \quad p>n>N \Rightarrow \forall k\in\mathbb{N} \quad |x_k^p - x_k^n| < \varepsilon \qquad (1)$$

Ainsi $(x_k^n)_n$ = suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$ (pour k fixé, quelconque).

Donc $(x_k^n)_n$ converge vers x_k.

En faisant tendre p vers l'∞, (1) donne :

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N \quad n>N \Rightarrow \forall k\in\mathbb{N} \quad |x_k - x_k^n| < \varepsilon \qquad (2)$$

Montrons que $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

$$(2) : \quad \forall k \quad |x_k - x_k^n| < \varepsilon$$

$$\forall k \quad |x_k| < \varepsilon + |x_k^n|$$

$$< \varepsilon + \sup |x_k^n| < \infty \Rightarrow \sup |x_k| < \infty$$

$$\Rightarrow x \in \ell^\infty$$

Alors $\|x\| = \sup |x_k|$ et (2) peut s'écrire :

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N \quad n>N \Rightarrow \|x - x^n\| < \varepsilon$$

, ce qui montre bien que $x^n \to x$ $(n \to +\infty)$ (dans ℓ^∞)

2°/ ℓ^p = Banach (pour la norme $\| \|_p$)

Rappel : $\ell^p = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \quad x_k \in \mathbb{C} \ / \ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}$

On pose $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Alors $(\ell^p, \| \|_p)$ = e.v.n.

Soit x^n une suite de Cauchy d'éléments de ℓ^p.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \qquad p > n > N \Rightarrow \|x^p - x^n\|_p < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k\geq 0} |x_k^p - x_k^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \forall k \quad |x_k^p - x_k^n| < \varepsilon$$

Donc $(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, qui est un Banach, donc converge vers x_k. Posons $x = (x_k)_k \in \{$suites de $\mathbb{C}\}$.

→ Montrons que $x \in \ell^p$

Le niveau (1) peut s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \qquad p > n > N \Rightarrow \forall K \ \overbrace{\left(\sum_{k=0}^{K} |x_k^p - x_k^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon}^{\wedge}$$

On peut alors passer à la limite dans $\wedge$ car le terme de gauche ne contient plus qu'un nombre fini de termes ! (pour $p \to +\infty$)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \qquad n > N \Rightarrow \forall K \ \left(\sum_{k=0}^{K} |x_k - x_k^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \qquad (2)$$

On peut repasser à la limite pour $K \to +\infty$ dans (2) :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \qquad n > N \Rightarrow \left(\sum_{k\geq 0} |x_k - x_k^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \qquad (3)$$

C'est-à-dire que pour $n > N$ $\left(\sum_{k\geq 0} |x_k - x_k^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$

L'inégalité de Minkowski donne alors :

$$\forall K \quad \left(\sum_{k=0}^{K} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{K} |x_k - x_k^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{K} |x_k^n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$K \to +\infty$: $$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \underbrace{\varepsilon + \|x^n\|_p}_{<\infty} \quad \text{pour } n > N \quad (\text{cf } (3))$$

Donc $(x_k)_k = x \in \ell^p$.

→ L'inégalité (3) montre, de plus que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad n > N \implies \|x - x^n\|_p < \varepsilon$$

c.à.d que $x^n \to x \in \ell^p$. Donc ℓ^p = Banach.

CQFD

<u>Remarque</u> : Nous allons montrer que $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}(A)$ (l'ensemble des fonctions bornées de A vers $\mathbb{C}$) et que $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(E)$ (l'ensemble des fonctions continues d'un compact E vers $\mathbb{C}$) sont des Banach lorsqu'ils sont munis de la norme $\| \ \|_\infty$ défini par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$.

(Le lecteur généralisera pour $\mathcal{B}_B(A)$ et $\mathcal{C}_B(E)$ où B désigne un e.v.n. complet)

Démonstration :

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}(A)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad p \geq n > N \implies \|f_p - f_n\|_\infty < \varepsilon$$

$$\implies \sup_{t \in A} |f_p(t) - f_n(t)| < \varepsilon \qquad (1)$$

Pour $t \in A$ fixé, $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{C}$, donc converge vers $f(t)$ dans $\mathbb{C}$. Cette fct f ainsi définie est bien un élément de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}(A)$ puisque : $\forall t$ dès que $n > N$ $\quad |f(t) - f_n(t)| < \varepsilon$

$$\Downarrow$$

$$\forall t \quad |f(t)| < \varepsilon + |f_n(t)|$$

$$\text{donc} \quad \sup_{t \in A} |f(t)| < \varepsilon + \underbrace{\sup_{t \in A} |f_n(t)|}_{<\infty} < \infty \quad \text{oui}$$

et l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad n > N \Rightarrow \| f - f_n \|_\infty < \varepsilon \qquad (2)$$

ce qui signifie bien que $\lim_{n \to +\infty} f_n = f$ (au sens de $\| \ \|_\infty$!)

Quant à $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(E)$: Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(E)$. Comme $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(E) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}}(E)$ (cf. cours topologie), f_n va converger vers f dans $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}(E)$ au sens de $\| \ \|_\infty$. Il nous reste à montrer que $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(E)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad n > N \Rightarrow \forall t \in E \quad |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \qquad (2)$$

(on a fait tendre $p \to +\infty$ dans (1))

Montrons que f est continue :

$$\forall t_0 \in E \qquad |f(t) - f(t_0)| \leq \underbrace{|f(t) - f_n(t)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(t_0) - f(t_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(t) - f(t_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}}$$

pour $n > N(\frac{\varepsilon}{3})$ défini en (2).

dès que $|t - t_0| < \eta$ en vertu de la continuité de f_n

donc f continue.

CQFD

Résumé : 4 exemples de Banach (= esp. métriques complets)

$$\ell^\infty = \{ (x_k)_k \quad x_k \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Sup} |x_k| < \infty \} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \operatorname{Sup} |x_k|$$

$$\ell^p = \{ (x_k)_k \quad x_k \in \mathbb{C} \ / \ \sum_{k \geq 0} |x_k|^p < \infty \} \quad \text{et} \quad \|x\|_p = \Big(\sum_{k \geq 0} |x_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

11.70

C_1 Topologie
Feuille n° 2

× (I) Soient E un espace topologique et $B \subset A \subset E$ deux parties de E. Montrer que E et A muni de la topologie induite, induisent la même topologie sur B. Comparer l'adherence de B dans A avec son adhence dans E.

× (II) Soient E un ensemble et $\mathcal{H}$ une famille quelconque de $\mathcal{P}(E)$. Montrer qu'il existe une topologie $\mathcal{T}$ et une seule contenant $\mathcal{H}$ et plus petite (pour $\subset$) que toutes celles contenant $\mathcal{H}$. Décrire les ouverts de $\mathcal{T}$. Quelle famille $\mathcal{H}$ prend on pour définir la topologie produit.

× (III) Soient E un espace topologique et $A \subset E$. Montrer l'équivalence :

i) $\mathring{A} \neq \emptyset$ ii) $\forall X \subset E$ avec $\overline{X} = E$ alors $X \cap A \neq \emptyset$

× (IV) On note par ∂A la frontière de A. Si A et B sont deux parties d'espaces topologiques X et Y, calculer $\partial(A \times B)$.

(V) A et B deux parties d'un espace topologique E. Montrer qu'on a : $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$ et que si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ alors $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$. la condition $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ est elle necessaire pour avoir l'egalité ?

Si $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont tels que $\partial\mathcal{O}_1 \cap \partial\mathcal{O}_2 = \emptyset$ montrer qu'on a :

$$\partial(\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2) = (\mathcal{O}_1 \cap \partial\mathcal{O}_2) \cup (\partial\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2).$$

× (VI) A étant un ouvert de E et $B \subset E$. Montrer qu'on a :

i) $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$. Est ce vrai $\subset$ si A n'est pas ouvert ?

ii) $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A \cap B}$.

× (VII) Dans un espace topologique E, montrer qu'il y a équivalence entre :

i) $\forall x, y$ avec $x \neq y$, $\exists \mathcal{V}(x)$ tel que $y \notin \mathcal{V}(x)$

ii) $\forall x \in E$, $\{x\}$ est un fermé de E.

iii) $\forall x \in E$ $\bigcap \mathcal{V}(x) = \{x\}$.

Montrer que tout espace séparé possède une des propriétés ci-dessus. Peut-on trouver un espace non séparé vérifiant l'une des propriétés ci dessus? | AS

× (VIII) Soit E un espace normé. Quelle est l'adhérence d'une boule ouverte, sa frontière? quel est l'intérieur d'une boule fermée?
Est ce vrai dans un espace métrique quelconque? Prendre $\mathbb{Z}$ muni de la métrique usuelle induite par $\mathbb{R}$.

× (IX) Si A et B sont deux parties d'un espace normé E, on note par $A + B$ l'ensemble des sommes $a + b$ où $a \in A$ et $b \in B$.

α) Montrer que si A ou B est ouvert, $A + B$ est ouvert

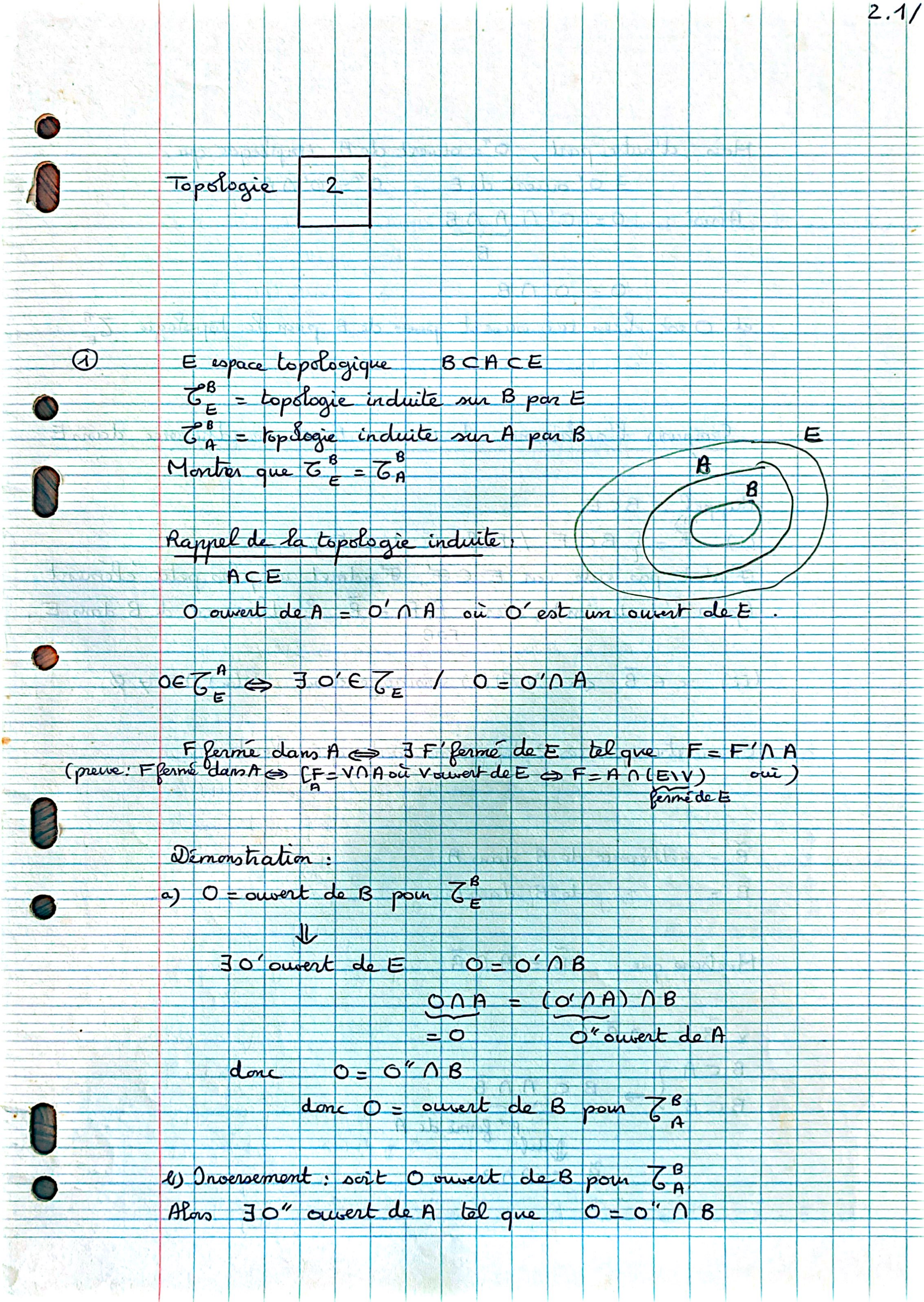
β) Montrer que si A et B sont compacts, $A + B$ est compact.

γ) Montrer que si A est compact, B fermé, $A + B$ est fermé

δ) Donner un exemple de deux fermés A et B de $\mathbb{R}$ tel que $A + B$ ne soit pas fermé.

(X) Enoncer les propriétés caractéristiques des voisinages dans un espace topologique et montrer l'équivalence entre topologie et la donnée de voisinages.
AS | Peut on faire de la même façon en enonçant les propriétés de l'adhérence.

× (XI) A quoi ça sert la topologie? A-t-on toujours besoin de la topologie? ....



Topologie 2

① E espace topologique $B \subset A \subset E$

τ_E^B = topologie induite sur B par E

τ_A^B = topologie induite sur A par B

Montrer que $\tau_E^B = \tau_A^B$

<u>Rappel de la topologie induite :</u>

$A \subset E$

O ouvert de A $= O' \cap A$ où O' est un ouvert de E.

$O \in \tau_E^A \Leftrightarrow \exists O' \in \tau_E \ / \ O = O' \cap A$

F fermé dans A $\Leftrightarrow$ $\exists$ F' fermé de E tel que $F = F' \cap A$

(preuve : F fermé dans A $\Leftrightarrow$ $\complement_A F = V \cap A$ où V ouvert de E $\Leftrightarrow$ $F = A \cap \underbrace{(E \setminus V)}_{\text{fermé de E}}$ oui)

Démonstration :

a) O = ouvert de B pour τ_E^B

$\Downarrow$

$\exists$ O' ouvert de E $\quad O = O' \cap B$

$$\underbrace{O \cap A}_{= O} = \underbrace{(O' \cap A)}_{O'' \text{ ouvert de A}} \cap B$$

donc $O = O'' \cap B$

donc O = ouvert de B pour τ_A^B

b) Inversement : soit O ouvert de B pour τ_A^B.

Alors $\exists$ O'' ouvert de A tel que $O = O'' \cap B$

Mais, d'autre part, O'' = ouvert de A implique que :

$$\exists\, O' \text{ ouvert de } E \qquad O'' = O' \cap A$$

Ainsi : $O = O' \cap \underbrace{A \cap B}_{B}$

$$O = O' \cap B$$

et O est bien un ouvert ~~pour~~ de B pour la topologie τ_E^B

Comparer l'adhérence de B dans A et son adhérence dans E

Rappel : $B \subset E$

(i) $\mathcal{F} = \{ B \subset F \;/\; F \text{ fermé dans } E \}$

$\mathcal{F}$ n'est pas vide car $E \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ admet un plus petit élément (pour l'inclusion), c'est $\bigcap_{F \supset B} F = \overline{B}$ l'adhérence de B dans E.

(ii) $x \in \overline{B} \iff \forall\, \mathcal{V}(x)$ voisinage de x $\quad \mathcal{V}(x) \cap B \neq \emptyset$

(On montre que ces 2 définitions sont équivalentes)

$\tilde{B}$ = adhérence de B dans A

$\overline{B}$ = " de B dans E

Montrons que $\tilde{B} = A \cap \overline{B}$

* $\tilde{B} \subset A \cap \overline{B}$?

$$\left.\begin{array}{l} B \subset A \\ B \subset \overline{B} \end{array}\right\} \Rightarrow B \subset \underbrace{A \cap \overline{B}}_{F' \text{ fermé de } A}$$

$$\Downarrow \text{def}$$

$$\tilde{B} \subset A \cap \overline{B}$$

$* \quad \tilde{B} \supset A \cap \bar{B}$?

Soit $x \in A \cap \bar{B} \overset{?}{\Rightarrow} x \in \tilde{B}$

Soit $V(x)$ un voisinage de x dans A. Montrons que $V(x) \cap B \neq \emptyset$

On $V(x) = W(x) \cap A$

$W(x) \cap \underbrace{A \cap B} \neq \emptyset$?

$W(x) \cap B \neq \emptyset$ oui car $x \in A$ et $x \in \bar{B}$

$\Downarrow$

$W(x) \cap B \neq \emptyset$

Remarque : montrer $\tilde{B} \supset A \cap \bar{B}$ en utilisant les fermés.

③ E topologique $A \subset E$

i) $\mathring{A} \neq \emptyset$

ii) $\forall X \subset E$ avec $\bar{X} = E$ alors $X \cap A \neq \emptyset$

i $\Rightarrow$ ii)

Raisonnons par l'absurde : Supposons que $\bar{X} = E$ et $X \cap A = \emptyset$

$X \cap A = \emptyset \Leftrightarrow X \subset \complement A \Rightarrow \bar{X} \subset \overline{\complement A}$

d'où $E \subset \overline{\complement A}$

$E = \overline{\complement A}$

On supposera connue la formule $\overline{\complement A} = \complement \mathring{A}$

$E = \complement \mathring{A}$

Ce qui est faux puisque $\mathring{A} \neq \emptyset$

i) $\Rightarrow$ ii) raisonnement direct.

Soit $X \subset E / \bar{X} = E$

$\mathring{A}$ est un ouvert non vide,

donc $\mathring{A} \cap X \neq \emptyset$

mais $\mathring{A} \cap X \subset A \cap X$

donc $X \cap A \neq \emptyset$

CQFD

ii) $\Rightarrow$ i)

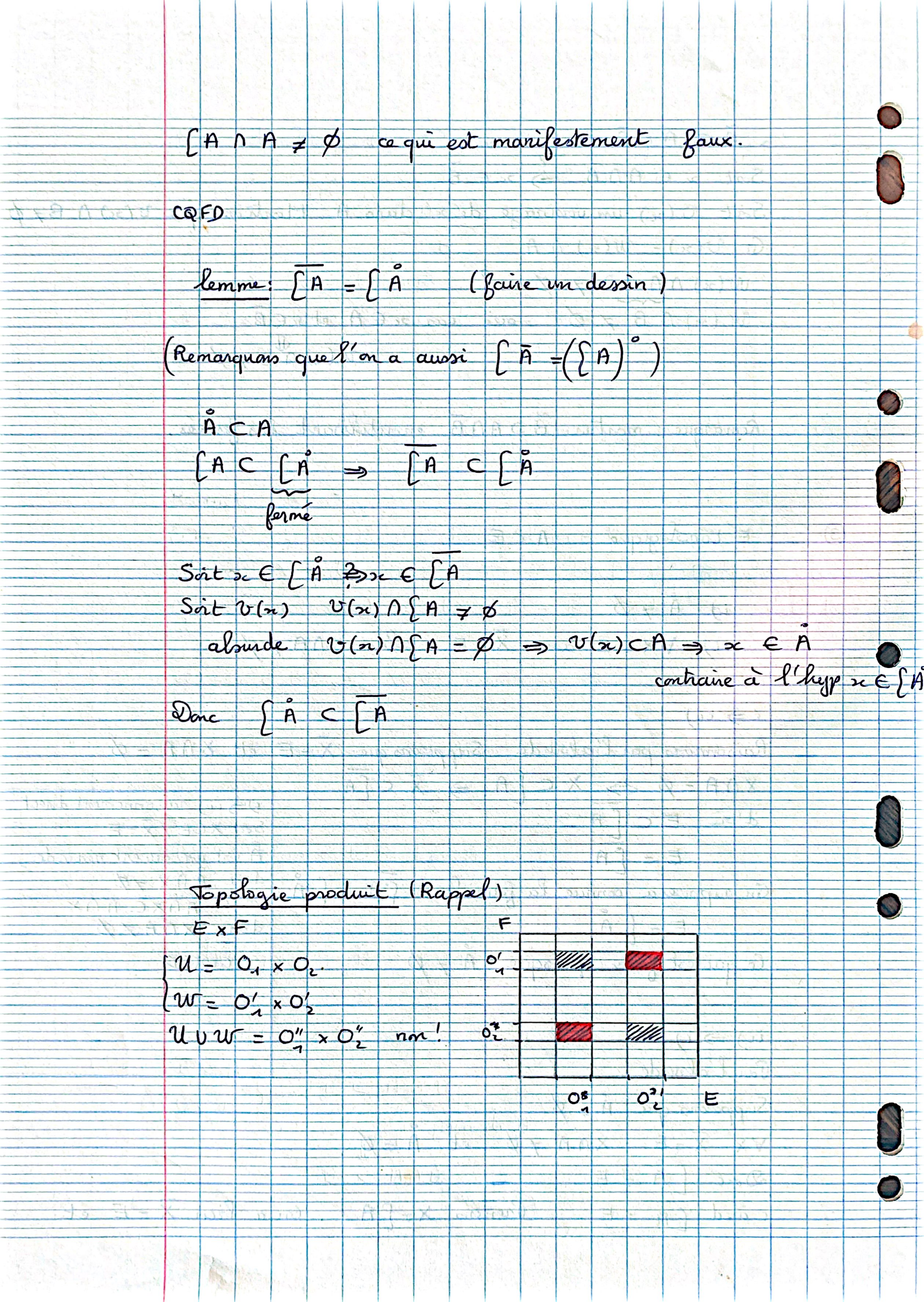
Par l'absurde.

Supposons que $\mathring{A} = \emptyset$

$\forall X \quad \bar{X} = E \quad X \cap A \neq \emptyset$ et $\mathring{A} = \emptyset$

Donc $\complement \mathring{A} = E$

c.à.d $\overline{\complement A} = E$ Prenons $X = \complement A$. On a bien $\bar{X} = E$ et



$\complement A \cap A \neq \emptyset$ ce qui est manifestement faux.

CQFD

<u>lemme</u>: $\overline{\complement A} = \complement \mathring{A}$ (faire un dessin)

(Remarquons que l'on a aussi $\complement \overline{A} = (\complement A)^{\circ}$)

$\mathring{A} \subset A$

$\complement A \subset \underbrace{\complement \mathring{A}}_{\text{fermé}} \Rightarrow \overline{\complement A} \subset \complement \mathring{A}$

Soit $x \in \complement \mathring{A} \overset{?}{\Rightarrow} x \in \overline{\complement A}$

Soit $v(x)$ $\quad v(x) \cap \complement A \neq \emptyset$

absurde $v(x) \cap \complement A = \emptyset \Rightarrow v(x) \subset A \Rightarrow x \in \mathring{A}$

contraire à l'hyp $x \in \complement \mathring{A}$

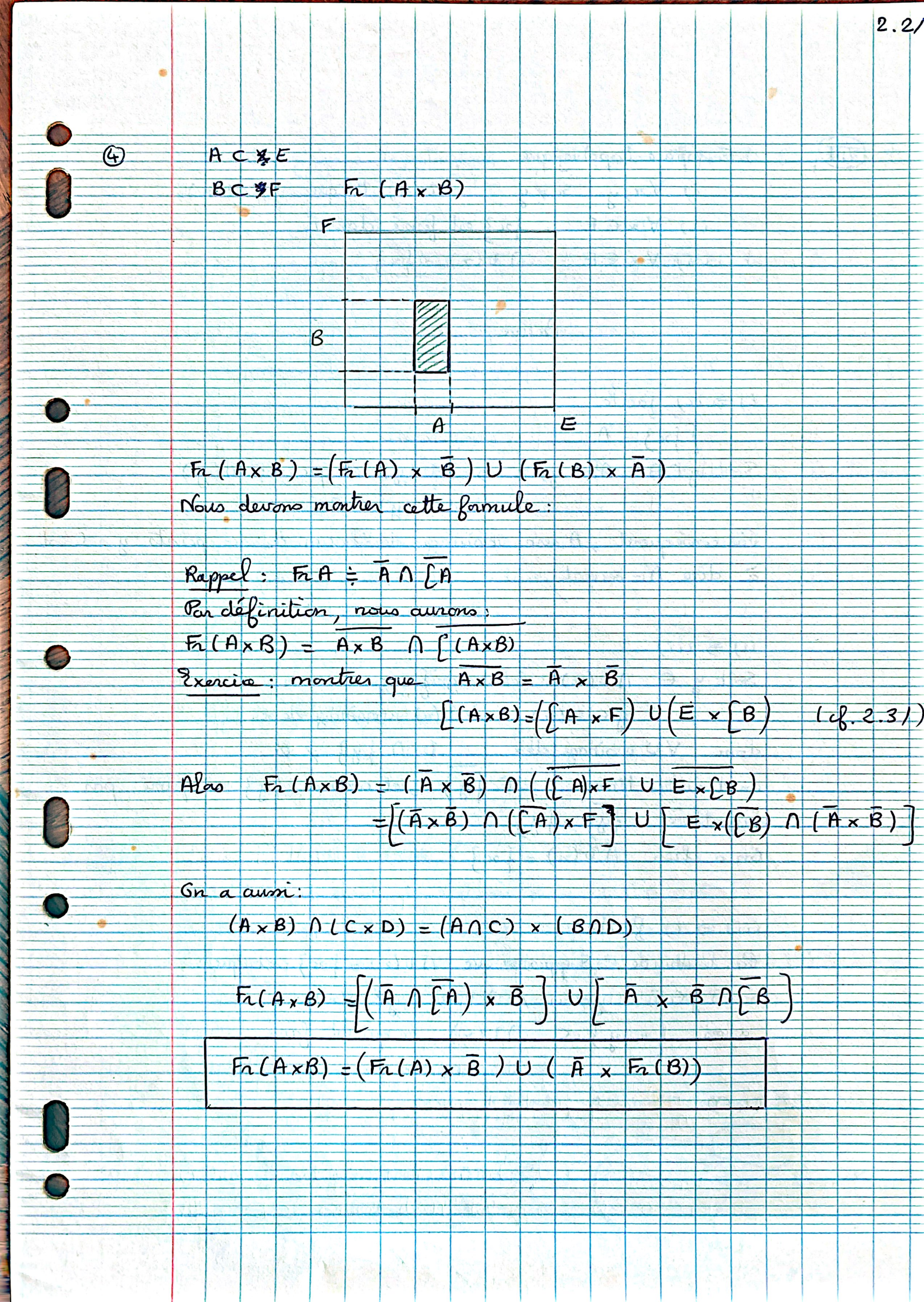
Donc $\complement \mathring{A} \subset \overline{\complement A}$

<u>Topologie produit</u> (Rappel)

$E \times F$

$\begin{cases} U = O_1 \times O_2 \\ W = O'_1 \times O'_2 \end{cases}$

$U \cup W = O''_1 \times O''_2$ non!



④ $A \subset E$

$B \subset F$ $\quad$ $Fr(A \times B)$

$$Fr(A \times B) = (Fr(A) \times \overline{B}) \cup (Fr(B) \times \overline{A})$$

Nous devons montrer cette formule :

Rappel : $Fr\,A \doteq \overline{A} \cap \overline{\complement A}$

Par définition, nous aurons :

$$Fr(A \times B) = \overline{A \times B} \cap \overline{\complement (A \times B)}$$

Exercice : montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

$$\complement (A \times B) = (\complement A \times F) \cup (E \times \complement B) \quad \text{(cf. 2.3.1)}$$

Alors $Fr(A \times B) = (\overline{A} \times \overline{B}) \cap (\overline{\complement A \times F} \cup \overline{E \times \complement B})$

$$= \left[(\overline{A} \times \overline{B}) \cap (\overline{\complement A}) \times F\right] \cup \left[E \times (\overline{\complement B}) \cap (\overline{A} \times \overline{B})\right]$$

On a aussi :

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$Fr(A \times B) = \left[(\overline{A} \cap \overline{\complement A}) \times \overline{B}\right] \cup \left[\overline{A} \times \overline{B} \cap \overline{\complement B}\right]$$

$$\boxed{Fr(A \times B) = (Fr(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times Fr(B))}$$

VII

E espace topologique

i) $\forall x, y \quad x \neq y \quad \exists v(x)$ tel que $y \notin v(x)$

ii) $\forall x \in E \quad \{x\}$ est fermé dans E

iii) $\forall x \in E \quad \bigcap v(x) = \{x\}$

Preuve

i) $\Rightarrow$ ii) facile

$\complement\{x\} = A$

Soit $y \in A$. Alors $y \neq x \Rightarrow \exists v(y)$ tel que $x \notin v(y)$

donc $v(y) \in A$

Par conséquent, A sera voisinage de chacun de ses points y. C'est à dire A = ouvert.

ii) $\Rightarrow$ iii)

Soit $y \in \bigcap v(x)$. Cela signifie que :

$y \in v(x) \quad \forall v(x)$ voisinage de x

donc $\forall v$ voisinage de x $\quad v \cap \{y\} \neq \emptyset$

en d'autres termes $x \in \overline{\{y\}}$, et comme $\{y\}$ est fermé par hypothèse $\overline{\{y\}} = \{y\}$

On a bien $\bigcap v(x) = \{x\}$

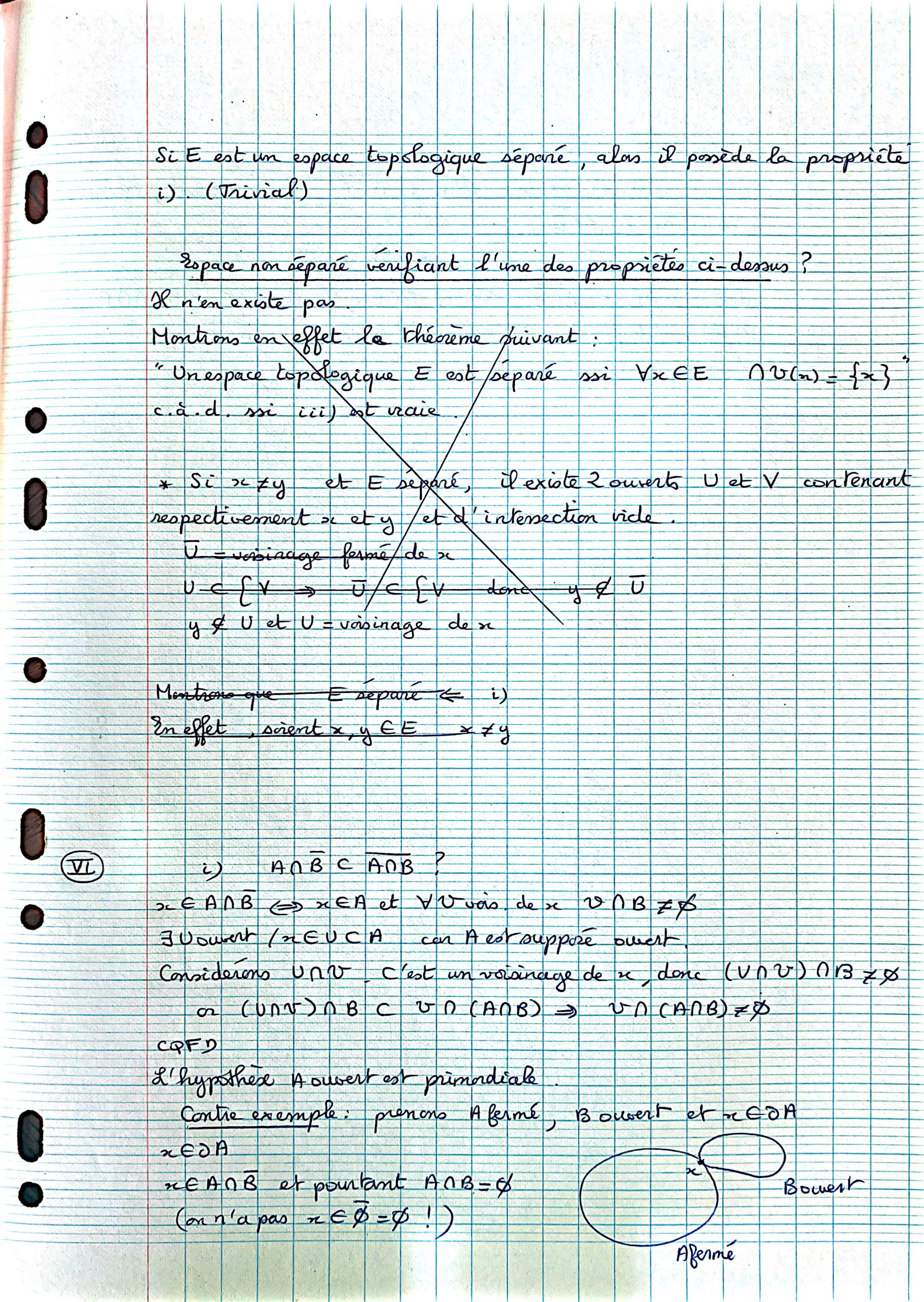
iii) $\Rightarrow$ i) facile

Par l'absurde. Supposons que $\bigcap v(x) = \{x\}$ et que :

$\exists y \in E \quad y \neq x \; / \; \forall v(x) \quad y \in v(x)$

alors $\{x, y\} \subset \bigcap v(x)$ ce qui est faux.

CQFD



Si E est un espace topologique séparé, alors il possède la propriété i). (Trivial)

<u>Espace non séparé vérifiant l'une des propriétés ci-dessus</u> ?

Il n'en existe pas.

Montrons en effet le théorème suivant :

« Un espace topologique E est séparé ssi $\forall x \in E \quad \bigcap \mathcal{V}(x) = \{x\}$ »
c.à.d. ssi iii) est vraie.

* Si $x \neq y$ et E séparé, il existe 2 ouverts U et V contenant respectivement x et y et d'intersection vide.

~~$\overline{U}$ = voisinage fermé de x~~

~~$U \subset \complement V \Rightarrow \overline{U} \subset \complement V$ donc~~ $y \notin \overline{U}$

$y \notin U$ et U = voisinage de x

~~Montrons que E séparé $\Leftarrow$~~ i)

~~En effet, soient $x, y \in E$~~ $x \neq y$

(VI) i) $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$?

$x \in A \cap \overline{B} \iff x \in A$ et $\forall \mathcal{V}$ vois. de x $\mathcal{V} \cap B \neq \emptyset$

$\exists U$ ouvert $/ x \in U \subset A$ car A est supposé ouvert.

Considérons $U \cap \mathcal{V}$, c'est un voisinage de x, donc $(U \cap \mathcal{V}) \cap B \neq \emptyset$

or $(U \cap \mathcal{V}) \cap B \subset \mathcal{V} \cap (A \cap B) \Rightarrow \mathcal{V} \cap (A \cap B) \neq \emptyset$

CQFD

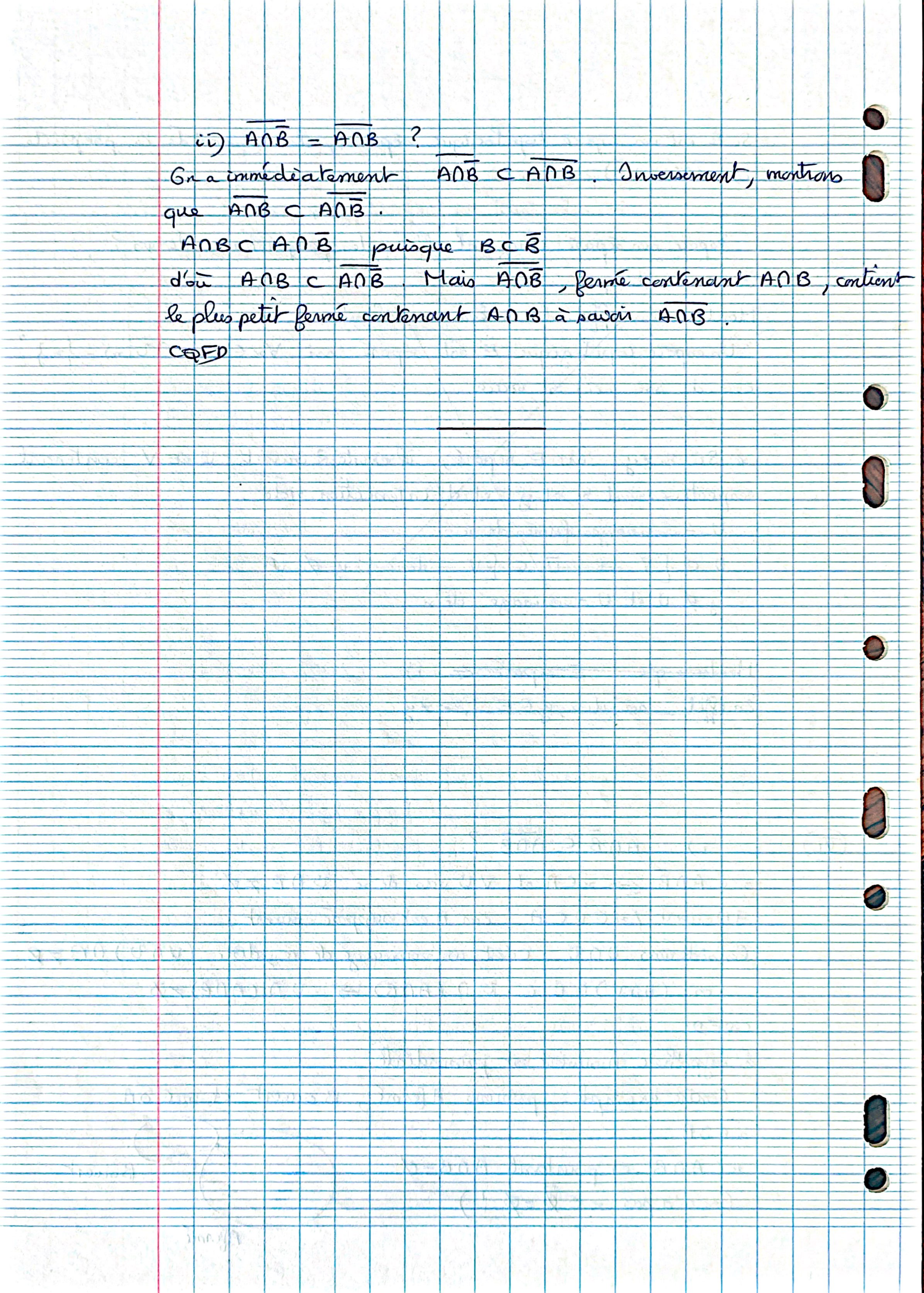
L'hypothèse A ouvert est primordiale.

<u>Contre exemple</u> : prenons A fermé, B ouvert et $x \in \partial A$

$x \in \partial A$

$x \in A \cap \overline{B}$ et pourtant $A \cap B = \emptyset$

(on n'a pas $x \in \overline{\emptyset} = \emptyset$!)



ii) $\overline{A\cap\overline{B}} = \overline{A\cap B}$?

On a immédiatement $\overline{A\cap\overline{B}} \subset \overline{A\cap B}$. Inversement, montrons que $\overline{A\cap B} \subset \overline{A\cap\overline{B}}$.

$A\cap B \subset A\cap\overline{B}$ puisque $B\subset\overline{B}$

d'où $A\cap B \subset \overline{A\cap\overline{B}}$. Mais $\overline{A\cap\overline{B}}$, fermé contenant $A\cap B$, contient le plus petit fermé contenant $A\cap B$ à savoir $\overline{A\cap B}$.

CQFD

Exercice mentionné au ④ feuille 2.2/

Enoncé : Montrer que :

a) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

b) $\overset{\circ}{\widehat{A \times B}} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$.

a) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

* Le produit de fermés est un fermé (cf. cours de topo. Schwarz).
Ainsi $\overline{A} \times \overline{B}$ est fermé et contient $A \times B$. Donc $\overline{A \times B} \subset \overline{A} \times \overline{B}$

* Inversement : soit $(a, b) \in \overline{A} \times \overline{B}$. Quel que soit le voisinage V de (a,b) dans $E \times F$, ce voisinage contient un ouvert de la forme $U_a \times U_b$, où U_a (resp. U_b) est un ouvert de E (resp. F) qui contient a (resp. b).

U_a = voisinage de $a \in \overline{A} \Rightarrow U_a \cap A \neq \emptyset$

U_b = " $b \in \overline{B} \Rightarrow U_b \cap B \neq \emptyset$

Donc

$$(U_a \times U_b) \cap (A \times B) \subset V \cap (A \times B)$$

$$\| $$

$$\underbrace{(U_a \cap A)}_{\neq \emptyset} \times \underbrace{(U_b \cap B)}_{\neq \emptyset} \neq \emptyset$$

Donc $V \cap (A \times B) \neq \emptyset$, c.à.d $(a, b) \in \overline{A \times B}$.

b) $\overset{\circ}{\widehat{A \times B}} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$.

* Le produit fini d'ouverts est un ouvert.

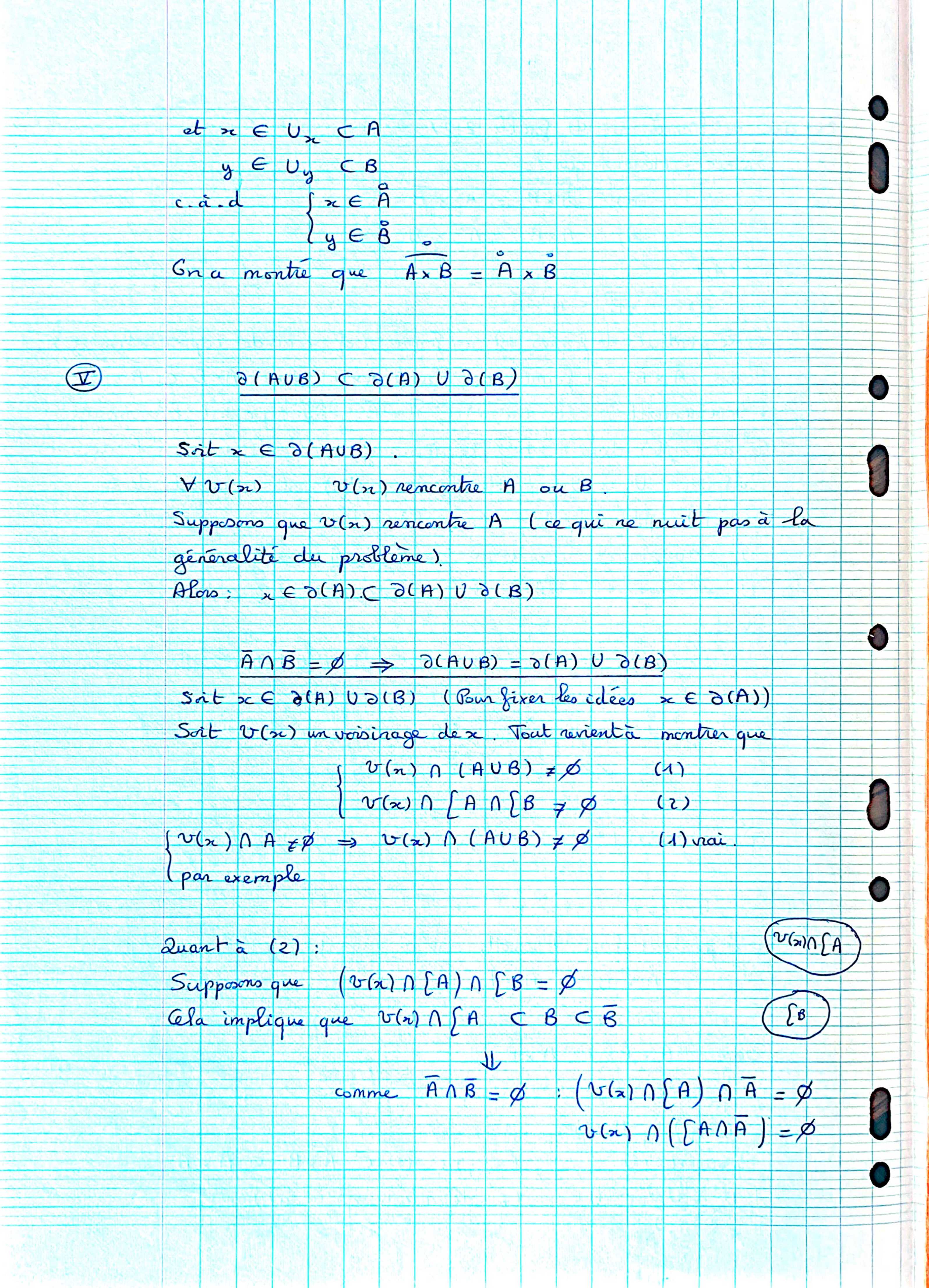
$$\underbrace{\overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}}_{\text{ouvert}} \subset A \times B$$

Donc $\overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \times B}}$

* $(x, y) \in \overset{\circ}{\widehat{A \times B}}$

$\exists$ ouvert U $(x,y) \in U \subset \overset{\circ}{\widehat{A \times B}} \subset A \times B$

$\exists U_x \times U_y \subset U$ (m̂ définitions qu'en a))



et $x \in U_x \subset A$

$y \in U_y \subset B$

c.à.d $\begin{cases} x \in \mathring{A} \\ y \in \mathring{B} \end{cases}$

On a montré que $\overset{\circ}{\overline{A \times B}} = \mathring{A} \times \mathring{B}$

(V) $\underline{\partial(A \cup B) \subset \partial(A) \cup \partial(B)}$

Soit $x \in \partial(A \cup B)$.

$\forall\, v(x)$ $v(x)$ rencontre A ou B.

Supposons que $v(x)$ rencontre A (ce qui ne nuit pas à la généralité du problème).

Alors : $x \in \partial(A) \subset \partial(A) \cup \partial(B)$

$\underline{\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \Rightarrow \partial(A \cup B) = \partial(A) \cup \partial(B)}$

Soit $x \in \partial(A) \cup \partial(B)$ (Pour fixer les idées $x \in \partial(A)$)

Soit $v(x)$ un voisinage de x. Tout revient à montrer que

$$\begin{cases} v(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset & (1) \\ v(x) \cap \complement A \cap \complement B \neq \emptyset & (2) \end{cases}$$

$\begin{cases} v(x) \cap A \neq \emptyset \\ \text{par exemple} \end{cases} \Rightarrow v(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ (1) vrai.

Quant à (2) : $v(x) \cap \complement A$

Supposons que $(v(x) \cap \complement A) \cap \complement B = \emptyset$

Cela implique que $v(x) \cap \complement A \subset B \subset \overline{B}$ $\complement B$

$\Downarrow$

comme $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$: $(v(x) \cap \complement A) \cap \overline{A} = \emptyset$

$v(x) \cap (\complement A \cap \overline{A}) = \emptyset$

② E ensemble

$\mathcal{H}$ = famille de $\mathcal{P}(E)$

Topologie engendrée par $\mathcal{H}$

Soit X l'ensemble des topologies sur E. $X \neq \emptyset$ car $\mathcal{P}(E) \in X$.
$\mathcal{P}(E) \supset \mathcal{H}$ donc le sous-ensemble $X_{\mathcal{H}}$ de X formé des topologies contenant $\mathcal{H}$ n'est pas vide. Alors $\bigcap_{\mathcal{T} \in X_{\mathcal{H}}} \mathcal{T}$ est une topologie contenant $\mathcal{H}$.
C'est la plus petite.

Vérifions bien que $\bigcap_{\mathcal{T} \in X_{\mathcal{H}}} \mathcal{T}$ est une topologie :

a) E et $\emptyset \in \mathcal{T} \quad \forall \mathcal{T} \in X_{\mathcal{H}} \Rightarrow E$ et $\emptyset \in \bigcap \mathcal{T}$

b) $A \in \bigcap \mathcal{T} \quad B \in \bigcap \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \bigcap \mathcal{T}$ oui

c) $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T} \quad \forall \mathcal{T} \in X_{\mathcal{H}}$

donc : $\bigcup_{i \in I} A_i \in \bigcap_{\mathcal{T} \in X_{\mathcal{H}}} \mathcal{T}$ oui

$\bigcap_{\mathcal{T} \in X} \mathcal{T}$ = plus petite topologie contenant $\mathcal{H}$
= "topologie engendrée par $\mathcal{H}$".

Description des ouverts de $\mathcal{T}$

Nécessairement :

$\forall A \in \mathcal{H} \quad A \in \mathcal{T}$ car $\mathcal{H} \subset \mathcal{T}$

Alors, comme $\mathcal{T}$ est une topologie, nécessairement :

$E, \emptyset \in \mathcal{T}$

$\bigcap_{i \in I \text{ fini}} A_i \in \mathcal{T}$

$\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$

Ainsi, nécessairement : $\bigcup_{j \in J} \left(\bigcap_{\substack{i \in I \\ I \text{ fini}}} A_{i,j} \right)$ = forme des ouverts de $\mathcal{T}$.

Inversement nous vérifions bien que ces ouverts définissent bien une topologie sur E : c'est bien la plus petite (par construction).

Conclusion :

Les ouverts de $\mathcal{Z}$ seront de la forme :

$$\bigcup_{j \in J} \left(\bigcap_{\substack{i \in I \\ I \text{ fini}}} A_{ij} \right) \qquad \text{où } A_{ij} \in \mathcal{H}$$

ou : E (on le rajoute !)

où :

I fini

J quelconque

Famille $\mathcal{H}$ pour définir la topologie-produit ?

$\forall U$ ouvert de $E \times F$:

$$U = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} A_i \times B_j \qquad A_i, B_j \text{ ouverts dans } E \text{ et } F \text{ (respectivement)}$$

Pour famille $\mathcal{H}$, on pourra donc prendre les parties de la forme $A_i \times B_j$ (A_i, B_j ouverts ...)

(8) E = espace vectoriel normé

Adhérence de $B(x, r)$ = $B'(x, r)$

En effet, soit $y \in \complement B'(x, r)$

Alors soit $\varepsilon = d(B(x, r), y)$.

Prenons $B(y, \frac{\varepsilon}{2})$ comme voisinage de y. Ce voisinage ne coupe pas B.

(Remarque : $\complement B'(x, r)$ = ouvert $\Rightarrow \exists U$ vois. ouvert contenant y et

contenu dans $\complement B'$. Ce voisinage ne rencontre pas B puisque $B \subset B'$.)

Donc $\underline{\overline{B} \subset B'}$

Inversement, soit $y \in B'$. Alors :

* si $y \in B$, $y \in \overline{B}$
* si $y \in B' \setminus B$ on a $d(x, y) = r$

$\forall$ boule ouverte $B(y, \varepsilon)$, $\exists z \in B(y, \varepsilon)$ tel que $z \in B$

donc $y \in \overline{B}$ (car E = es. vect. normé)

Ainsi $B' = \overline{B}$

Cette circonstance est spéciale aux espaces vect. normés :

En effet : $y \in B' \setminus B \Leftrightarrow d(x, y) = r$

$$d(x, y) = r \leq \underbrace{d(z, y)}_{< \varepsilon} + \underbrace{d(x, z)}_{< r} < \varepsilon + r$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut poser $d(z, y) < \varepsilon$ et $d(y, z) < \varepsilon$ pour un $\underline{z \in E}$ * car $d(z, y) < \varepsilon$ définit bien des points $z \in E$, on peut, par exemple, prendre $z = \alpha x + \beta y$ $\alpha, \beta \in]0, 1[$ pour α, β convenable

<u>Même réponses pour sa frontière et pour l'intérieur d'une boule fermée</u>

C'est faux pour des espaces métriques quelconques : exemple :

-1 ... 0 ... 1 ... $\mathbb{R}$

$B(0, 1) = \{0\}$ $B'(0, 1) = \{-1, 0, 1\}$

$\overline{B} = \{0\} = B$ Alors $\overline{B} \subsetneq B'$

* $z = \alpha x + \beta y$ $d(z, y) < \frac{\varepsilon}{2}$

Correction :

① Dans un espace métrique (E, d)

$B'(0,1) \subset \overline{B(0,1)}$? $\qquad x \in B'(0,1) \Rightarrow x \in \overline{B(0,1)}$

Le problème : $\exists x_n \in B(0,1) \quad x_n \to x \quad (n \to +\infty)$

* Si $\|x\| < 1$ rien à démontrer. On prend $x_n = x \quad \forall n$
* Si $\|x\| = 1$

Prenons

$$x_n = x - \frac{x}{n} \in B(0,1) \text{ car } \|x_n\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \overbrace{\|x\|}^{1} < 1 \quad \forall n$$

On a bien $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$ car $\|x_n - x\| = \left\|\frac{x}{n}\right\| = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to +\infty)$

Pour une boule $B(a, r)$, et pour le cas où $\|x - a\| = r$

$$x_n = (x - a) - \frac{x-a}{n} + a$$

$$x_n = x - \frac{x-a}{n}$$

On aura bien :

$$\|x_n - a\| = \|x - a\|\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$
$$= r\left(1 - \frac{1}{n}\right) < r \Rightarrow x_n \in B(a, r)$$

et $\|x_n - x\| = \frac{\|x-a\|}{n} = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to +\infty)$

donc x tel que $\|x\| = 1$ appartient bien à $\overline{B(0,1)}$.

② Pour l'intérieur : $B(a,r) \subset B'(a,r) \Rightarrow B(a,r) \subset \overset{\circ}{B'(a,r)}$

(X) Propriétés caractéristiques des voisinages

$(E, \mathcal{O})$ = espace topologique.
Désignons par φ l'application qui à $x \in E$ fait correspondre tous les voisinages de x.

$$\varphi : E \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$$
$$x \longmapsto \varphi(x) = \text{ens. des voisinages de } x$$

Du fait des propriétés des voisinages, nous obtenons les propriétés suivantes de la fonction φ :

(1) $A \in \varphi(x)$ et $A \subset B \Rightarrow B \in \varphi(x)$ (si $A \neq \emptyset$)
(2) $A, B \in \varphi(x) \Rightarrow A \cap B \in \varphi(x)$
(3) $A \in \varphi(x) \Rightarrow x \in A$
(4) $A \in \varphi(x) \Rightarrow \exists B \in \varphi(x) \quad \forall y \in B \Rightarrow A \in \varphi(y)$

Donnée des voisinages $\Rightarrow$ donnée de la topologie sur E.
Définissons l'ensemble des ouverts de E par :

$$\mathcal{O} = \{ A \in \mathcal{P}(E) \;/\; \forall y \in A \quad A \in \varphi(y) \}$$

où φ est une application de E vers $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ qui vérifie les 4 axiomes ci-dessus.
Montrons que l'on a bien défini une topologie :

a) $\emptyset \in \mathcal{O}$
$E \in \mathcal{O}$ puisque $\forall y \in E \quad A \in \varphi(y)$ et $A \subset E \Rightarrow E \in \varphi(y)$

b) Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}$ est un él. de $\mathcal{O}$:
Soient A et $B \in \mathcal{O}$

$$y \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} y \in A \Rightarrow A \in \varphi(y) \\ y \in B \Rightarrow B \in \varphi(y) \end{cases}$$

En utilisant l'axiome (2) : $A \cap B \in \varphi(y)$ oui

c) Toute réunion (finie ou non !) d'éléments de $\mathcal{O}$ est encore un élément de $\mathcal{O}$.

Soit $A_i \in \mathcal{O} \quad \forall i \in I$

$\forall y \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists i \quad y \in A_i$

Et $\quad y \in A_i \Rightarrow A_i \in \mathcal{V}(y)$

Or, selon l'axiome (1) :

$$\left.\begin{array}{l} A_i \in \mathcal{V}(y) \\ A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i \end{array}\right\} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{V}(y)$$

Ainsi, la donnée d'un ensemble "de voisinages" pour chaque x nous définit une topologie sur E, à savoir $(E, \mathcal{O})$.
Pour vérifier l'équivalence entre "topologie" et "donnée de voisinages", il nous reste encore à montrer que cette topologie définie à partir des voisinages, admet bien comme voisinages de x les ensembles contenus dans $\mathcal{V}(x)$ et rien qu'eux.

(Remarque : Pour démontrer a, b, et c) nous n'avons utilisé que deux axiomes : le n° 1 et le n° 2.)

Les voisinages $\text{vois}(x)$ de x, dans $(E, \mathcal{O})$ sont définis par :

$$E \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$$
$$x \mapsto \text{vois}(x)$$

où $\text{vois}(x) = \{ A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) \ / \ \exists U \in \mathcal{O} \quad x \in U \subset A \}$

* $\text{vois}(x) \subset \varphi(x)$

Soit $A \in \text{vois}(x)$

alors $\exists U \in \Theta \quad x \in U \subset A$

$U \in \Theta$ donc $\forall x \in U \quad U \in \varphi(x)$

Ainsi $\left.\begin{array}{l} U \subset A \\ U \in \varphi(x) \end{array}\right\} \underset{(ax 1)}{\Longrightarrow} A \in \varphi(x)$

* Inversement, montrons que $\varphi(x) \subset \text{vois}(x)$

Soit $A \in \varphi(x)$ et soit $U = \{ y \in E \quad A \in \varphi(y) \}$

Alors $x \in U$ et $U \subset A$ (axiome 3).

Ainsi $x \in U \subset A$.

Reste à montrer que U est un ouvert pour (E, Θ)

Soit $y \in U \Rightarrow A \in \varphi(y) \overset{(ax 4)}{\Longrightarrow} \exists B \in \varphi(y) \ \forall z \in B \Rightarrow A \in \varphi(z)$

$z \in B \Rightarrow z \in U$

donc $B \subset U$.

De $B \in \varphi(y)$ et $B \subset U$ on conclut (ax. 1) $U \in \varphi(y)$

Donc que U est ouvert ($U \in \Theta$).

On a donc $x \in U \subset A$ et $U \in \Theta \Leftrightarrow A \in \text{vois}(x)$

(9) α) A ou B ouvert $\Rightarrow$ A+B ouvert

Soit A ouvert $\Rightarrow \forall a \in A \quad \exists \varepsilon \quad B(a, \varepsilon) \subset A$

$\forall x \in A+B \quad \exists a, b \quad x = a+b \quad a \in A \quad b \in B$

Alors $B(x, \varepsilon) \subset A+B$

En effet, $\forall y \in B(x, \varepsilon) \quad d(x,y) = \|y-x\| < \varepsilon$

$$\Downarrow$$

$$\|y-b-a\| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$y-b \in A \Rightarrow y \in A+B$$

β) A et B compacts $\Rightarrow$ A+B compact

Eu égard au th. de Bolzano-Weierstrass, il faut montrer que toute suite de A+B admet au moins une valeur d'adhérence.

Soit $z_n \in A+B$. $\quad x_n + y_n = z_n \quad x_n \in A$, $y_n \in B$

Comme A est compact, x_n admet x comme val. adhérence (esp. met) $\Leftrightarrow \exists n_k \quad x_{n_k} \to x$

" B " y_n " y " " $\Leftrightarrow \exists n_m \quad y_{n_m} \to y$

Conclusion : $\exists n_k / \quad x_{n_k} \to x$ et $y_{n_k} \to y$. Alors $z_{n_k} \to x+y \Rightarrow x+y$ est valeur d'adhérence de la suite quelconque $z_n \in A+B$.

γ) A compact et B fermé $\Rightarrow$ A+B fermé

Soit $z \in \overline{A+B}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad B(z, \frac{1}{n}) \cap A+B \neq \emptyset$

c.à.d : $\exists x_n \in A \quad \exists y_n \in B \quad / \quad x_n + y_n \in B(z, \frac{1}{n})$

(x_n) = suite dans A qui est compact $\Rightarrow$ elle possède une valeur d'adhérence (car on travaille dans un espace métrique) $\Rightarrow$ il existe une sous-suite convergente que, par mesure de commodités, nous continuerons à écrire x_n :

$x_n \to x \quad (n \to +\infty)$

et $x \in A$ (car A compact)

Posons $z_n = x_n + y_n$. (z_n) est une suite qui tend vers z (cf. construction)

$y_n = z_n - x_n$ convergera vers $z - x \in B$ (car B est fermé.)

Ainsi $z - x = y \in B \Rightarrow z = \underbrace{x}_{\in A} + \underbrace{y}_{\in B} \in A + B \Rightarrow \overline{A+B} = A + B$

CQFD

δ) <u>Contre exemple</u> :

$A = \left\{ n + \frac{1}{n} \right\} \quad (n \in \mathbb{N})$ A fermé (voir $\complement A$ ouvert)

$B = \left\{ -n \right\} \quad (n \in \mathbb{N})$ B " "

et pourtant $A + B = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ n'est pas fermé car $0 = \lim \frac{1}{n}$

et $0 \notin A + B$.

C_1 Topologie
Feuille n° 3

× (I) Soient E un espace métrique complet et $B = B(a;r)$ la boule de centre $a \in E$ et de rayon r. Soit $f : E \to E$ qui, dans B, est une contraction de constante $K < 1$.
Si f est telle que $d(f(a), a) < (1-K)r$, f admet dans B un point fixe et un seul.

× (II) Dans l'espace $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a,b])$, on considère l'équation fonctionnelle suivante (équation de Fredholm non homogène) :

$$f(x) = \lambda \int_a^b H(x,t) f(t)\,dt + h(x)$$

où $h \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a,b])$, $H : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que, si λ est suffisamment petit, cette équation admet une solution et une seule.

× (III) Soient $H : \mathbb{R} \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue t.q $\forall u, v \in \mathbb{R}$ $\forall x \in [a,b]$
$|H(u,x) - H(v,x)| \leq K\,|u-v|$ où $K \geq 0$
et $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues.
Soit alors $F : \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a,b]) \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a,b])$ défini par

$$F(f)(x) = \int_a^x H(f(t),t)\,dt + h(x)$$

Montrer alors :
1) $\forall n$, $\forall f, g \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a,b])$ $\|F^n(f) - F^n(g)\|_\infty \leq \frac{1}{n!} K^n (b-a)^n \|f-g\|_\infty$
2) $\exists! f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a,b])$ t.q $F(f) = f$.

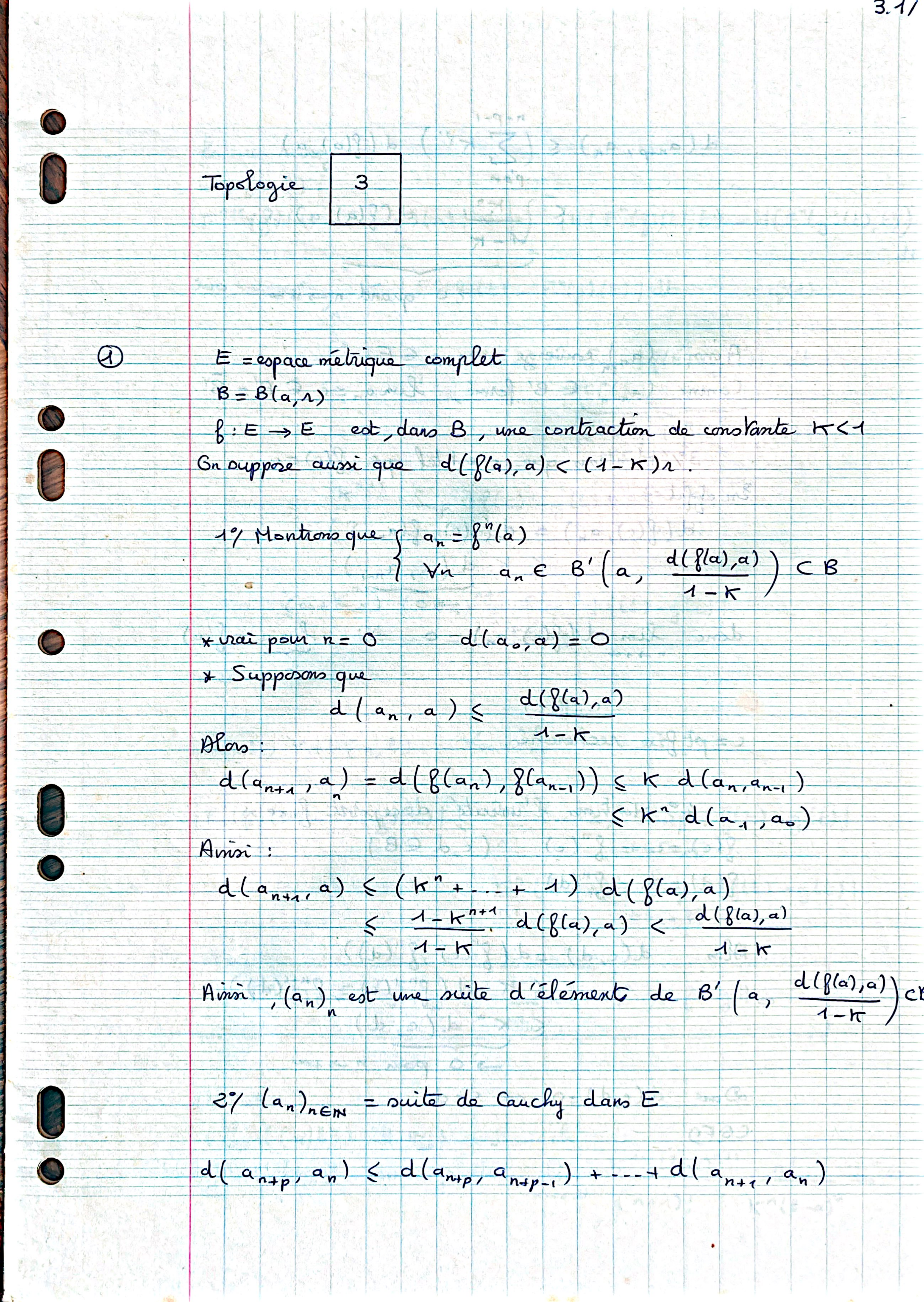
× (IV) Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie dont les ouverts sont des réunions d'intervalles de la forme $[a, b[$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
Montrer que, pour cette topologie, $\mathbb{R}$ est séparable mais n'a pas de base dénombrable d'ouverts.

X (V) Soient C_0 l'espace des suites de nombres complexes qui convergent vers 0 et C_{00} l'espace des suites de nombres complexes nulles à partir d'un certain rang (dépendant de la suite).

1) Montrer que : C_0 et C_{00} sont des sous-espaces de ℓ^∞
C_0 est la fermeture de C_{00} dans ℓ^∞
C_{00} (muni de $\| \|_\infty$) est un espace séparable
et en déduire que C_0 (muni de $\| \|_\infty$) est également séparable.

2) Montrer que : C_{00} est un sous-espace dense de ℓ^p.
C_{00} (muni de $\| \|_p$) est un espace séparable et
en déduire que ℓ^p est également séparable.

X (VI) Montrer que, de tout recouvrement ouvert d'un espace topologique à base dénombrable d'ouverts, on peut extraire un recouvrement dénombrable.



Topologie | 3 |

① E = espace métrique complet

$B = B(a, r)$

$f : E \to E$ est, dans B, une contraction de constante $K<1$

On suppose aussi que $d(f(a), a) < (1-K)r$.

1°/ Montrons que $\begin{cases} a_n = f^n(a) \\ \forall n \quad a_n \in B'\left(a, \dfrac{d(f(a),a)}{1-K}\right) \subset B \end{cases}$

* vrai pour $n = 0$ $\quad d(a_0, a) = 0$
* Supposons que

$$d(a_n, a) \leq \frac{d(f(a),a)}{1-K}$$

Alors :

$$d(a_{n+1}, a_n) = d(f(a_n), f(a_{n-1})) \leq K\, d(a_n, a_{n-1})$$
$$\leq K^n\, d(a_1, a_0)$$

Ainsi :

$$d(a_{n+1}, a) \leq (K^n + \dots + 1)\, d(f(a), a)$$
$$\leq \frac{1-K^{n+1}}{1-K}\, d(f(a), a) < \frac{d(f(a),a)}{1-K}$$

Ainsi, $(a_n)_n$ est une suite d'élément de $B'\left(a, \dfrac{d(f(a),a)}{1-K}\right) \subset B$

2°/ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ = suite de Cauchy dans E

$$d(a_{n+p}, a_n) \leq d(a_{n+p}, a_{n+p-1}) + \dots + d(a_{n+1}, a_n)$$

$$d(a_{n+p}, a_n) \leqslant \left(\sum_{p'=n}^{n+p-1} k^{p'}\right) d(f(a), a)$$

$$\leqslant \underbrace{\frac{k^n}{1-k} \quad d(f(a), a)}_{\to 0 \text{ quand } n \to +\infty}$$

oui

Ainsi $(a_n)_n$ converge vers $c \in E$.

Comme $(a_n)_n \in B'$ fermé, $\lim a_n = c \in B' = \bar{B}'$

3°/ Montrons que c est tel que $f(c) = c$

En effet :

$$d(f(c), a_n) = d(f(c), f(a_{n-1}))$$

$$\leqslant k \underbrace{d(c, a_{n-1})}_{\to 0 \quad (n \to +\infty)}$$

donc $\lim_{n \to +\infty} d(f(c), a_n) = 0 \Rightarrow \underbrace{\lim a_n}_{c} = f(c)$

$c = f(c)$

c = pt fixe recherché.

4°/ Montrons l'unicité de ce point fixe :

$f(c) = c = f^n(c) \qquad (c, d \in B)$

$f(d) = d = f^n(d)$

Alors $\quad d(c, d) = d(f^n(c), f^n(d))$

$$\leqslant k \quad d(f^{n-1}(c), f^{n-1}(d))$$

$$\leqslant \underbrace{k^n \quad d(c, d)}_{\to 0 \text{ pour } n \to +\infty}$$

Donc $d(c, d) = 0 \iff c = d$.

CQFD

② $(\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a,b]), \| \|_\infty)$ = Banach

$$f(x) = \lambda \int_a^b H(x,t) f(t)\, dt + h(x) \qquad h \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a,b])$$

Considérons :

$$\Psi : \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a,b]) \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a,b])$$
$$f \longmapsto \Psi(f)$$

$$\Psi(f) = \left\{ x \xmapsto{\Psi(f)} \lambda \int_a^b H(x,t) f(t)\, dt + h(x) \right\}$$

Montrons que $\Psi(f) \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a,b])$ et que Ψ est une contraction pour λ suffisamment petit.

* $\Psi(f) \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a,b])$ oui

* Existence de $0 < K < 1$ tel que $\|\Psi(f) - \Psi(g)\|_\infty \leq K \|f-g\|_\infty$

$$\underbrace{\sup_{x\in[a,b]} |\Psi(f)(x) - \Psi(g)(x)|}$$

$$|\lambda| \left| \int_a^b H(x,t)(f(t)-g(t))\, dt \right|$$

$$\leq |\lambda| \int_a^b |H(x,t)|\, |f(t)-g(t)|\, dt$$

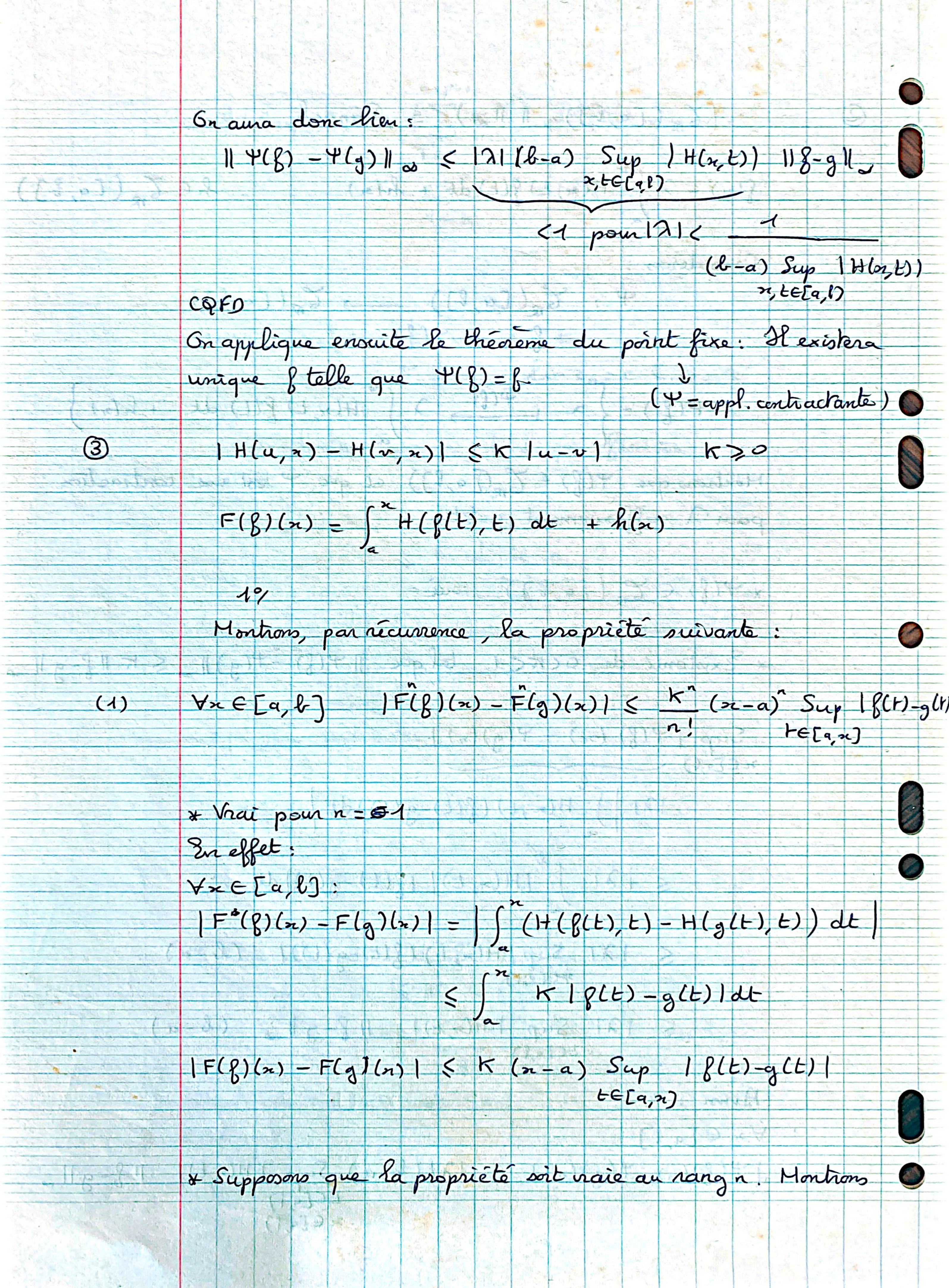
$$\leq |\lambda| \sup_{x\in[a,b]} |H(x,t)(f(t)-g(t))| \quad (b-a)$$

$$\leq |\lambda| \sup_{t\in[a,b]} |H(x,t)| \quad \|f-g\|_\infty \quad (b-a)$$

Ainsi :

$\forall x \in [a,b]$

$$|\Psi(f)(x) - \Psi(g)(x)| \leq |\lambda|(b-a) \sup_{\substack{t\in[a,b] \\ x\in[a,b]}} |H(x,t)| \quad \|f-g\|_\infty$$



On aura donc bien :

$$\|\Psi(f)-\Psi(g)\|_\infty \le \underbrace{|\lambda|(b-a)\sup_{x,t\in[a,b]}|H(x,t)|}_{<1 \text{ pour } |\lambda|<\frac{1}{(b-a)\sup_{x,t\in[a,b]}|H(x,t)|}}\ \|f-g\|_\infty$$

CQFD

On applique ensuite le théorème du point fixe : Il existera unique f telle que $\Psi(f)=f$. (Ψ = appl. contractante)

③ $|H(u,x)-H(v,x)| \le K\,|u-v| \qquad K\geq 0$

$$F(f)(x)=\int_a^x H(f(t),t)\,dt + h(x)$$

1°/

Montrons, par récurrence, la propriété suivante :

(1) $\forall x\in[a,b] \quad |F^n(f)(x)-F^n(g)(x)| \le \frac{K^n}{n!}(x-a)^n \sup_{t\in[a,x]}|f(t)-g(t)|$

* Vrai pour $n=1$

En effet :

$\forall x\in[a,b]$:

$$|F(f)(x)-F(g)(x)| = \left|\int_a^x \big(H(f(t),t)-H(g(t),t)\big)\,dt\right|$$

$$\le \int_a^x K\,|f(t)-g(t)|\,dt$$

$$|F(f)(x)-F(g)(x)| \le K\,(x-a)\sup_{t\in[a,x]}|f(t)-g(t)|$$

* Supposons que la propriété soit vraie au rang n. Montrons

Ça au rang $n+1$

$x \in [a,b]$:

$$|F^{n+1}(f)(x) - F^{n+1}(g)(x)| \leq \left| \int_a^x \left(H(F^n(f)(t),t) - H(F^n(g)(t),t) \right) dt \right|$$

$$\leq \int_a^x K \, |F^n(f)(t) - F^n(g)(t)| \, dt \qquad \mathcal{P}(1) :$$

$$\leq \int_a^x K \frac{1}{n!} K^n (t-a)^n \underbrace{\sup_{t' \in [a,t]} |f(t') - g(t')|}_{\leq \sup_{t \in [a,x]} |f(t) - g(t)|} dt$$

$$\leq \frac{K^{n+1}}{n!} \sup_{t \in [a,x]} |f(t) - g(t)| \, \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)}$$

$$\leq \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \sup_{t \in [a,x]} |f(t) - g(t)|$$

oui

Ainsi, $\forall x \in [a,b] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$|F^n(f)(x) - F^n(g)(x)| \leq \frac{K^n}{n!} (x-a)^n \sup_{t \in [a,x]} |f(t) - g(t)|$$

$$\leq \frac{K^n}{n!} (b-a)^n \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$$

D'où :

$$\boxed{\| F^n(f) - F^n(g) \|_\infty \leq \frac{K^n}{n!} (b-a)^n \, \| f - g \|_\infty}$$

2°)

$(\mathcal{C}_\mathbb{R}([a,b]), \| \|_\infty)$ = Banach

$\sum \frac{K^n (b-a)^n}{n!}$ converge car $\lim_{n \to +\infty} \frac{K^{n+1}(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{K^n(b-a)^n} = 0$

On applique le théorème du point fixe :

$$\exists !\, f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a,b]) \quad / \quad F(f) = f.$$

④ $\mathbb{R}$ est muni de la topologie dont la base est l'ensemble des intervalles de la forme $[a,b[$

<u>$\mathbb{R}$ est séparable</u> :

Soit $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Soit U un ouvert quelconque de $\mathbb{R}$. Alors $U = \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i[$

~~$\exists i \in I$~~

$[a_i, b_i[\subset U$ pour i arbitraire dans I.

Or $[a_i, b_i[\cap \mathbb{Q}$ n'est pas vide (car $[a_i, b_i[$ est un voisinage de $\frac{a_i + b_i}{2}$ pour la topologie usuelle, et que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle).

Donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ muni de la nouvelle topologie.

<u>$\mathbb{R}$ n'admet pas de base dénombrable d'ouverts</u>.

Considérons les ouverts de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, a+1[$ $(a \in \mathbb{R})$.

On aura, si $\{U_i, (i \in I)\}$ désigne une base d'ouverts,

$$[a, a+1[= \bigcup_{i \in J} U_i \qquad \text{où } J \subset I$$

$\exists i \in J \subset I$ $\quad a \in U_i \quad$ et $\quad U_i \subset [a, a+1[$

Notons $i(a)$ cet indice associé au réel a. Nous définissons ainsi une application i :

$$i : \mathbb{R} \longrightarrow I$$
$$a \longmapsto i(a)$$

i est une injection. En effet, si $a \neq a'$ alors $U_{i(a)} \neq U_{i(a')}$

puisque $U_{i(a)} \subset [a, a+1[$
$U_{i(a')} \subset [a', a'+1[$
et si $a' > a$, par exemple, $a \in U_{i(a)}$ et $a \notin U_{i(a')}$.
L'existence de cette injection i prouve bien que I (ensemble des indices) n'est pas dénombrable (car $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Remarque : la topologie définie dans cet exercice est plus fine que la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. En effet, soit $]a, b[$ un élément de la base de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.
Alors $$]a, b[= \bigcup_{\substack{n > N \\ N \text{ convenable}}} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}[$$
ce qui montre bien que les ouverts de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ sont des ouverts de la nouvelle topologie
(les 2 topologies ne sont cependant pas équivalentes !)

(V)

1°/

C_0 = suites (x_n) $x_n \in \mathbb{C}$ $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$

C_{00} = suites (y_n) $y_n \in \mathbb{C}$ $\exists N$ $n > N \Rightarrow y_n = 0$

Evidemment $C_{00} \subsetneq C_0$

a)
C_0 = ss-espace de ℓ^∞
Rappel $\ell^\infty = \{$ suites (x_n) $x_n \in \mathbb{C}$ $\sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty \}$

démonstration facile.

C_{00} = ss-espace de ℓ^∞. oui

~~2~~/ b)

<u>C_0 est la fermeture de C_{00} dans ℓ^∞</u>

Il faut montrer que $\overline{C_{00}} = C_0$

a) $\overline{C_{00}} \subset C_0$

Soit $(y_n)_n \in \overline{C_{00}}$? $(y_n)_n \in C_0$

$\Downarrow$ def

$\forall \varepsilon \quad \exists z \in C_{00} \quad \|(z) - (y)\|_\infty < \varepsilon$

$\sup_k |z_k - y_k| < \varepsilon$

à partir d'un certain rang N : $z_k = 0$.

Donc $\sup_{k>N} |y_k| < \varepsilon \Rightarrow (y_n) \in C_0$

donc $\overline{C_{00}} \subset C_0$

b) $C_0 \subset \overline{C_{00}}$

Soit $(x_n) \in C_0$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists ?\ (y_n) \in C_{00}$ tel que $\|(x_n)_n - (y_n)_n\|_\infty < \varepsilon$

$\sup_n |y_n - x_n| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad n > N \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$

On pourra donc définir y_n par :

$$\begin{cases} y_n = 0 & \text{pour } n > N \\ y_n = x_n & \text{pour } n \in [1, N] \end{cases}$$

$(y_n) = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots 0, \dots)$

donc $v(x_n) \cap C_{00} \neq \emptyset \quad \forall v$ voisinage de (x_n)

c.à.d $C_0 \subset \overline{C_{00}}$

c)

C_{00} est séparable ?

C_{00} séparable $\Leftrightarrow \exists A \subset C_{00}$ A dénombrable
et partout dense ($\overline{A}^{C_{00}} = C_{00}$)

Posons $C_{00}^{(N)} = \{ (x_n)_n \,/\, \forall n > N \quad x_n = 0 \}$

$C_{00} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} C_{00}^{(N)}$

On peut identifier $C_{00}^{(N)} \xrightarrow[\text{isom.} \simeq]{} \mathbb{C}^N$ ← pt. de vue topologique : homéomorphisme suffit.

(Cette isomorphisme est une isométrie de façon immédiate.)

$\mathbb{C}$ est séparable puisque $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ dénombrable et partout dense.

$\mathbb{C}$ séparable donc $\mathbb{C}^N$ est séparable
donc $C_{00}^{(N)}$ est séparable.

lemme "La réunion dénombrable d'espaces séparables est séparable", donc, ici C_{00} sera ~~dénom~~ séparable

Preuve : $E = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} E_N$, $\forall N \quad E_N$ séparable $\Rightarrow$ E séparable

$D_N \subset E_N$ dénombrable et partout dense : $\overline{D_N} = E_N$

$D = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} D_N$ est dénombrable (admis)

Alors $\overline{D} = \overline{\bigcup_{N \in \mathbb{N}} D_N}$

On veut que $\overline{D} = E$

Soit $x \in E$ $\forall$ voisinage V dans E $V \cap D \overset{?}{\neq} \emptyset$

$x \in E = \bigcup E_N \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ $x \in E_n$

$V \cap E_n$ = voisinage de x dans E_n

donc $(V \cap E_n) \cap D_n \neq \emptyset$

c.à.d $V \cap D_n \neq \emptyset$

$\Downarrow$

$V \cap D \neq \emptyset$ puisque $D = \bigcup D_n$

Remarque $x \in E \Rightarrow x \in E_n = \underbrace{\overline{D_n}^{E_n} \subset \overline{D}_n}_{\text{car } \overline{D_n}^{E_n} = \overline{D}_n \cap E_n} \subset \overline{D}$

C_0 séparable :

Tout revient à montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} E \text{ e.t} \\ \cup \\ F \text{ mesurable tel que } E = \overline{F} \\ \text{séparable} \end{array}\right\} \Rightarrow E \text{ séparable}$$

En effet $\exists D$ dénombrable $\overline{D}^F = F$

$\overline{D} \cap F = F$

donc $F \subset \overline{D} \Rightarrow \overline{F} \subset \overline{D}$

$E \subset \overline{D} \Leftrightarrow E = \overline{D}$

2°/a) C_{00} = s. espace dense de ℓ^p ?

On veut montrer que $\overline{C_{00}} = \ell^p$

Soit $(x_n)_n \in \ell^p$ ε donné

? $\exists (y_n)_n \in C_{00}$ $\|(x_n) - (y_n)\|_p < \varepsilon$

c.à.d $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|^p < \varepsilon^p$

Comme $(x_n)_n \in \ell^p$ $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^p < \infty$

Donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \sum_{k=N}^{+\infty} |x_k|^p < \varepsilon^p$

Choisissons $\begin{cases} y_n = 0 & \text{pour } n > N \\ y_n = x_n & \text{pour } n \leq N \end{cases}$ et

Alors (y_n) vérifie bien $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|^p < \varepsilon^p$ et $(y_n) \in C_{00}$

On aura donc bien $\overline{C_{00}} = \ell^p$

b) <u>C_{00} séparable pour la norme</u> $\| \|_p$

$C_{00} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} C_{00}^{(N)}$

Il reste à montrer que $C_{00}^{(N)}$ est séparable pour la norme $\| \|_p$

$C_{00}^{(N)} \xrightarrow{\text{isom.}} \mathbb{C}^N$ en tant qu'espaces vectoriels.

$(x_1, \dots, x_N, 0 \dots) \overset{\varphi}{\longmapsto} (x_1, \dots, x_N)$

$\left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p\right)^{1/p}$ $\qquad \sup_{1 \leq k \leq N} |x_k|$

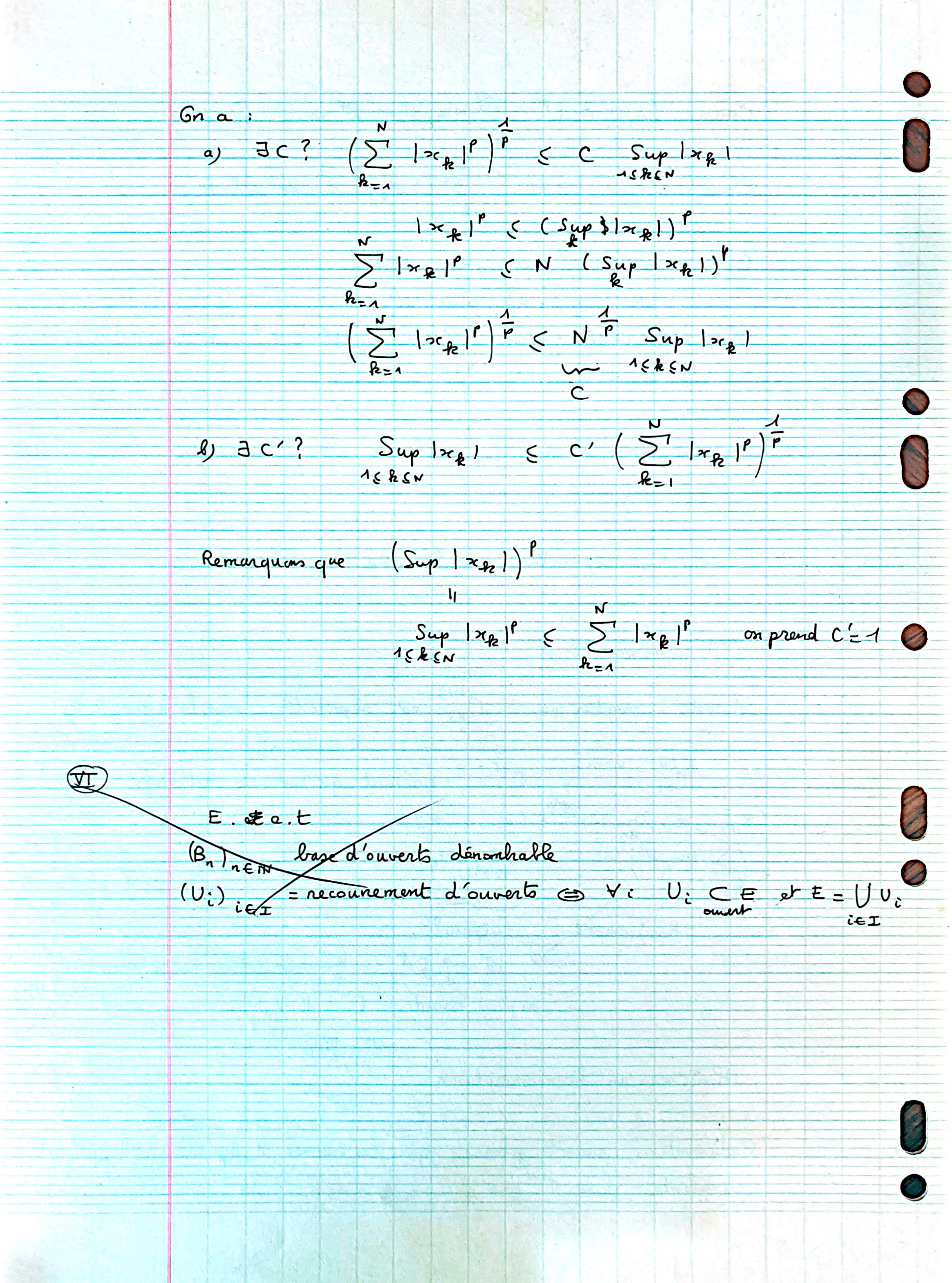
homéomorphisme $\qquad$ séparable

$\updownarrow \uparrow Id$ (= homéomorphisme car les normes sont équivalentes)

on peut regarder $(\mathbb{C}^n, \| \|_p)$ — dim. finie

Alors φ sera un homéomorphisme.

Redémontrons, pour le plaisir, que les normes $\| \|_p$ et $\| \|_\infty$ sont équivalentes dans $\mathbb{C}^N$.



On a :

a) $\exists C$? $\left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{1 \leq k \leq N} |x_k|$

$$|x_k|^p \leq (\sup_k \{|x_k|\})^p$$

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p \leq N \left(\sup_k |x_k|\right)^p$$

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \underbrace{N^{\frac{1}{p}}}_{C} \sup_{1 \leq k \leq N} |x_k|$$

b) $\exists C'$? $\sup_{1 \leq k \leq N} |x_k| \leq C' \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Remarquons que $\left(\sup |x_k|\right)^p$

$$\shortparallel$$

$$\sup_{1 \leq k \leq N} |x_k|^p \leq \sum_{k=1}^{N} |x_k|^p$$ on prend $C' = 1$

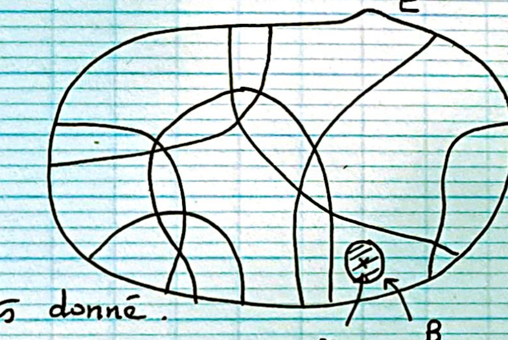
(VI)

E. e.t

$(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base d'ouverts dénombrable

$(U_i)_{i \in I}$ = recouvrement d'ouverts $\Leftrightarrow \forall i \quad U_i \underset{\text{ouvert}}{\subset} E$ et $E = \bigcup_{i \in I} U_i$

(VI) Montrer que, de tout recouvrement ouvert d'un espace topologique à base dénombrable d'ouverts, on peut extraire un recouvrement dénombrable.



Nous noterons :

$(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base dénombrable d'ouverts.

$(U_i)_{i\in I}$ le recouvrement d'ouverts donné.

Ainsi $\begin{cases} U_i \text{ ouvert} \\ E = \bigcup_{i\in I} U_i \end{cases}$

Posons $K = \{ n \in \mathbb{N} \ / \ \exists\, i(n) \in I \text{ vérifiant } B_n \subset U_{i(n)} \}$

On définit ainsi une application :

$$i : K \longrightarrow I$$
$$n \longmapsto i(n) \text{ tel que } B_n \subset U_{i(n)}$$

Nous voulons montrer que $\bigcup_{n\in K} U_{i(n)}$ est aussi un recouvrement de E.

$\forall x \in E$, on aura $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$.

Ainsi :

$\exists\, i \in I$ tel que $x \in U_i$

Comme $(B_n)_n$ est une base d'ouverts et que U_i est un ouvert :

$\exists\, n \in \mathbb{N}$ $\quad x \in B_n \subset U_i$

Pour ce n, il existe au moins un U_i vérifiant $B_n \subset U_i$. Par conséquent ce n appartient à l'ensemble K.

Donc il existe $i(n)$ tel que $B_n \subset U_{i(n)}$, c.à.d qu'en fin de compte nous aurons $x \in B_n \subset U_{i(n)} \Rightarrow x \in U_{i(n)}$ pour un n convenable.

Ainsi $\left(U_{i(n)}\right)_{n\in K\subset\mathbb{N}}$ sera un sous-recouvrement dénombrable de E.

I.M.S.P

77.78

C1 Topologie

Feuille n° 4.

× (I) Soit $f : E \to F$. Montrer que si F est un espace topologique, il existe sur E une topologie et une seule moins fine que celles pour lesquelles f est continue.
Si E est un espace topologique, montrer qu'il existe sur F une topologie et une seule plus fine que celles pour lesquelles f est continue. Application : Si E est un espace topologique muni d'une relation d'équivalence $\sim$, décrire la topologie la plus fine qui rend continue la surjection canonique.

× (II) On considère les applications :

$$\left(\mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}([0,1]), \| \|_\infty\right) \xrightarrow{D} \left(\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1]), \| \|_\infty\right)$$
$$f \longmapsto Df = f' \quad \text{(la dérivée de } f)$$

$$\left(\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1]), \| \|_\infty\right) \xrightarrow{S} \left(\mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}([0,1]), \| \|_\infty\right)$$
$$f \longmapsto Sf \ : \ Sf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Montrer que D n'est pas continue, alors que S est continue et que $D \circ S = id_{\mathcal{C}}$.
D est-elle une application ouverte ?

(III) Sur $\mathbb{R}$ on considère les deux distances :

$$d_0(x,y) = |x-y| \quad \text{et} \quad d_1(x,y) = |x^3-y^3|$$

Montrer que d_0 et d_1 sont topologiquement $\sim$; que les suites de Cauchy sont les mêmes, mais qu'elles ne sont pas uniformément équivalentes.

A. INTISSAR

× fait au tableau

(IV) Soient E et F deux espaces topologiques et f une application de E dans F

a) On suppose qu'il existe un recouvrement de E par des ouverts $(\theta_i)_{i \in I}$ tel que la restriction de f à chacun de ces ouverts soit continue pour la topologie induite. Montrer que f est continue.

b) On suppose qu'il existe deux fermés T_1 et T_2 de E recouvrant E tels que la restriction de f à chacun de ces fermés soit continue pour la topologie induite. Montrer que f est continue.

c) On suppose que E est séparé et qu'il existe $a \in E$ tel que f est continue en ce point et que la restriction de f à $E - \{a\}$ soit continue. Montrer que f est continue.

d) Montrer à l'aide d'une topologie $E = \{a, b\}$, qu'on ne peut pas supprimer dans c) l'hypothèse de séparation.

Topologie 4 (Solutions)

(1) $E \xrightarrow{f} F$

a) (E, τ) topologique, munir de $(F, f*\tau)$ tel que $f : (E,\tau) \longrightarrow (F, f_*\tau)$ soit continue

Choisir $f*\tau$ de façon à ce qu'elle définisse la topologie la plus fine rendant f continue

b) $f : E \longrightarrow (F, \tau)$. Munir E de ~~une topologie~~ $f^*\tau$ = topologie la moins fine rendant f continue.

c) généraliser

$E_1 \xrightarrow{f_1}$, $E_2 \xrightarrow{f_2}$, $E_3 \xrightarrow{f_3}$, $E_4 \xrightarrow{f_4}$ (F, τ)

Trouver $\tau_1, \dots, \tau_4$ rendant f_i cont(... etc)

Solution :

La topologie grossière sur F rend f continue.

Cherchons en une autre plus fine :

$$(E, \tau) \xrightarrow{f} (E, \tau')$$

f continue.

Nécessairement $\forall O' \in \tau' \Rightarrow f^{-1}(O') \in \tau$

$$\tau' \subset \underbrace{\{ B \; / \; B \subset F \text{ et } f^{-1}(B) \in \tau \}}$$

est-ce, par hasard, une topologie ?
Notons la $(f*\tau =) \tau''$

* $\emptyset \in \tau''$ car $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$
* $A_i \in \tau'' \Rightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau''$
* $B_1, B_2 \in \tau''$ $\quad B_1 \cap B_2 \in \tau''$?

Or $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \in \tau$

On a bien $B_1 \cap B_2 \in \tau''$

Ainsi $\tau'' =$ ~~$\tau*$~~ $f_* \tau$ = topologie la plus fine rendant f continue.

Remarque

E, τ $\quad \sim$ d'équivalence.

$\downarrow \pi$ = surjection canonique

$E/_\sim$

On munit $E/_\sim$ de la topologie la plus fine rendant la surjection canonique continue.

$(E/_\sim \, , \underbrace{\pi * \tau}_{\text{topologie quotient}})$

U ouvert de $E/_\sim \iff \pi^{-1}(U)$ ouvert de E

Exemples :

① Sur $\mathbb{R}^2$ $\quad (x,y) \sim (x',y') \iff \begin{cases} x - x' \in \mathbb{Z} \\ y - y' \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$E = \mathbb{R}^2/_\sim = (\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$

Décrire la topologie sur $\mathbb{R}^2/_\sim$

② Sur $\mathbb{R}$ $\quad x - x' \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{R}/\mathbb{Z}$?

② $E = (\mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}[0,1], \|\ \|_\infty)$ $F = (\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[0,1], \|\ \|_\infty)$

a) $E \xrightarrow{D} F$

$f \longmapsto Df = f'$

b) $F \xrightarrow{S} E$

$f \longmapsto Sf : Sf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

Calculer $D \circ S$. D et S sont-elles continues.

Solution :

* $D \circ S(f)(x) = D(Sf(x))$

$= D\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) = f(x) \quad \forall x \in F$

Donc

$D \circ S = Id_F$

~~On montre de même que~~ $S \circ D$ ~~$= Id_E$~~ Attention. $S \circ D(x) = f(x) - f(0)$

* D et S continues ?

S continue :

S = application linéaire ~~continue~~.

~~Pour démontrer~~

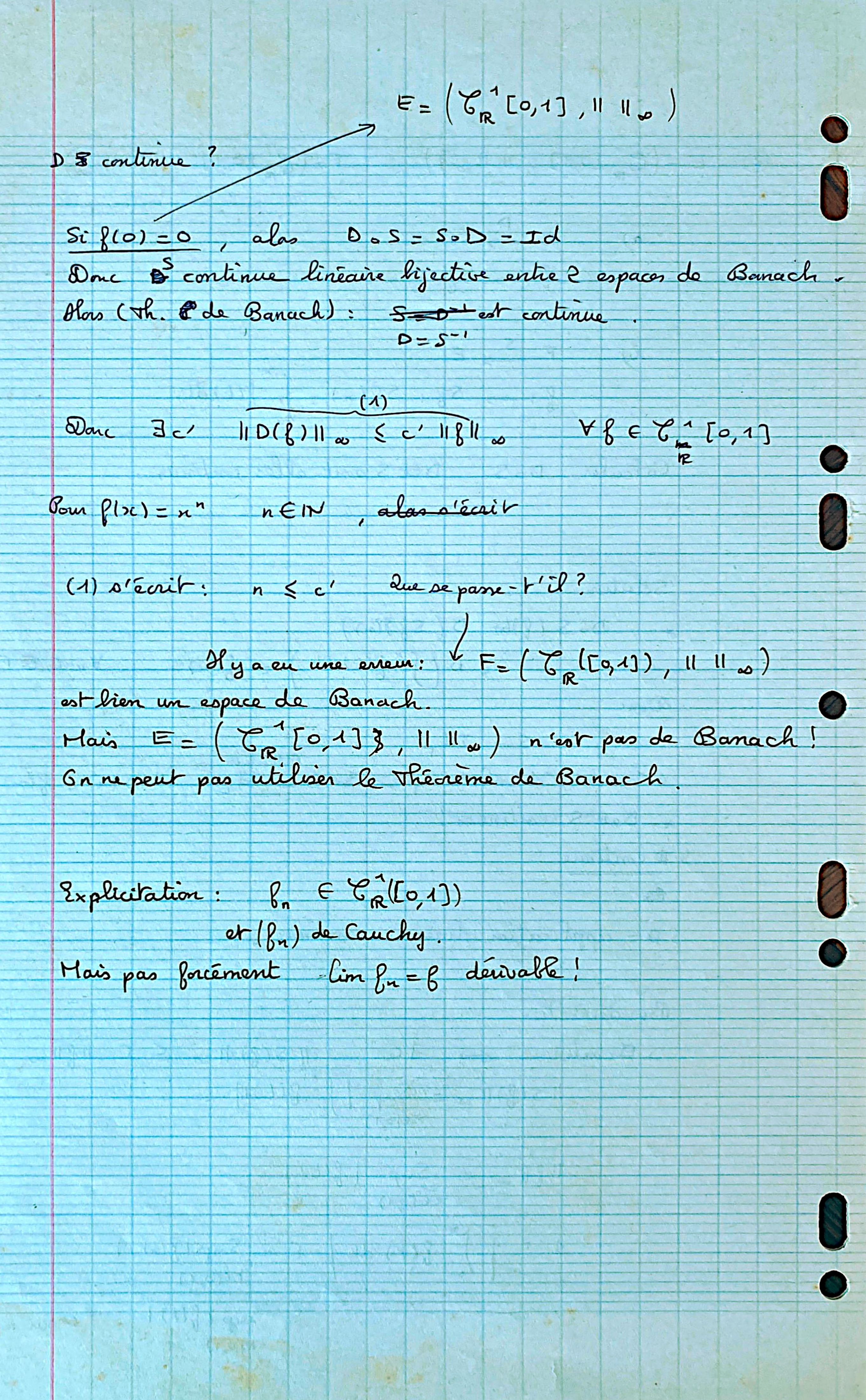
S continue $\iff \exists C \quad \|S(f)\|_\infty \leq C \|f\|_\infty$

$\|S(f)\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x f(t)\,dt \right|$

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(t)|$

$\left| \int_0^x f(t)\,dt \right| \leq x \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$

$\leq \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ sur $x \in [0,1]$



$E = \left(\mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}[0,1] , \| \, \|_\infty \right)$

D continue ?

Si $f(0) = 0$, alors $D \circ S = S \circ D = Id$

Donc S continue linéaire bijective entre 2 espaces de Banach.

Alors (Th. de Banach) : ~~$S = D^{-1}$~~ est continue.
$D = S^{-1}$

Donc $\exists c' \quad \overbrace{\|D(f)\|_\infty \leq c' \|f\|_\infty}^{(1)} \quad \forall f \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}[0,1]$

Pour $f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}$, ~~alors s'écrit~~

(1) s'écrit : $n \leq c'$ Que se passe-t'il ?

Il y a eu une erreur : $F = \left(\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1]), \| \, \|_\infty \right)$ est bien un espace de Banach.

Mais $E = \left(\mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}[0,1], \| \, \|_\infty \right)$ n'est pas de Banach !

On ne peut pas utiliser le théorème de Banach.

Explicitation : $f_n \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$
et (f_n) de Cauchy.

Mais pas forcément $\lim f_n = f$ dérivable !

③ <u>Thème de réflexion</u> : Soit E un espace vectoriel topologique de dimension finie sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

(CAPES)

c.à.d : E esp. vectoriel muni d'une topologie telle que les applications $E\times E \to E$ et $K\times E \to E$

$\varphi_1 : (x,y) \mapsto x+y$ $\quad (\lambda, x) \to \lambda x$

soient continues.

On note e.v.t.

Montrer qu'il existe sur E une structure d'<u>esp. topologique séparée</u> et <u>une seule</u>.

(Cf Topologie de Schwartz)

Ici $d_0(x,y) = |x-y|$ seule topo. séparée.

<u>d_0, d_1 équivalentes</u>

d_0 d_1 topologiquement $\sim$ $\Leftrightarrow$ engendrent la m̄ topologie
$\Leftrightarrow$ Id. homéomorphisme.
(ou)

$$\mathrm{Id} : (\mathbb{R}, d_0) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_1)$$
$$x \longmapsto \mathrm{Id}(x) = x$$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \alpha>0 \quad d_0(x,x_0) < \alpha \Rightarrow d_1(x,x_0) < \varepsilon$

$|x-x_0| < \alpha \Rightarrow |x^3 - x_0^3| < \varepsilon$

c'est la continuité de l'application $x \mapsto x^3$.

oui.

$$\mathrm{Id} : (\mathbb{R}, d_1) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_0)$$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \alpha>0 \quad |x^3 - x_0^3| < \alpha \Rightarrow |x-x_0| < \varepsilon$

c'est la continuité de l'application $x \mapsto \sqrt[3]{x}$

Les suites de Cauchy sont les mêmes : trivial

si $|u_m - u_n| \to 0 \quad n, m \to +\infty$

$\Downarrow$

$|u_n^3 - u_m^3| \to 0 \quad n, m \to +\infty$

$|u_n^3 - u_m^3| = |u_n - u_m| \, |(u_n^2 + u_n u_m + u_m^2)|$

toute suite de Cauchy est bornée $|u_n| \leq M$.

$\leq |u_n - u_m| \; Cte$

Réciproquement

I.M.S.P
77.78

C1 Topologie
Feuille n°: 5

x (I) Montrer que toute famille d'ouverts disjoints d'un espace séparable est dénombrable. En déduire que l'ensemble des points isolés d'un espace séparable est dénombrable.

x (II) Soient E et E' deux espaces topologiques et $f : E \to E'$.
Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
i) f est continue
ii) $\forall A' \subset E'$ $\overline{f^{-1}(A')} \subset f^{-1}(\overline{A'})$
iii) $\forall A' \subset E'$ $f^{-1}(\mathring{A'}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(A')}}$

Donner un exemple où l'inclusion de la propriété ii) est stricte.

x (III) Soit E un ensemble muni d'une distance d.
Montrer que $d_1(x,y) = \inf(1, d(x,y))$ est aussi une distance sur E.
Montrer que $(E,d) \xrightarrow{Id} (E,d_1)$ est un homéomorphisme et en déduire que tout espace métrique est homéomorphe à un espace métrique borné.

x (IV) Soient F un fermé d'un espace métrique E et $f : E - F \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/d(x,F)$
Montrer que le graphe de f est un fermé de $E \times \mathbb{R}$.
En déduire que tout ouvert de E est homéomorphe à un fermé de $E \times \mathbb{R}$. Expliciter ce résultat dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R} -]-1,1[$.

x (V) Soient E et E' deux espaces métriques et f une bijection de E sur E'.
Montrer que si E' est complet, f uniformément continue, f^{-1} continue, alors E est complet.

x (VI) Soit E un espace topologique non vide.
1) Montrer que pour que E soit séparé il faut et il suffit que, pour tout $x \in E$, l'intersection des voisinages fermés de x soit réduite à $\{x\}$. (Comparer avec l'exercice (VII) de la Feuille n° 4)

2) Supposons que E n'est pas dénombrable et qu'il est muni de la topologie dont les ouverts sont $\emptyset$ et les parties de E dont le complémentaire est dénombrable. Montrer que pour tout $x \in E$, l'intersection des voisinages de x est réduite à $\{x\}$ (i.e $\{x\}$ est un fermé de E) mais que E n'est pas séparé.

3) Soient $A \subset E$ et a un point d'accumulation de A. Montrer que si E est séparé et si V est un voisinage de a, alors $V \cap A$ est infini.

4) Sur $[0,1[$, montrer que l'ensemble des intervalles $[0,\alpha[$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$ est l'ensemble des ouverts d'une topologie de $[0,1[$. Cette topologie est-elle séparée ? Quels sont les fermés de cette topologie ? Soit $I = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, déterminer $\overline{I}$, $\overset{\circ}{I}$. Quels sont les points d'accumulation de $A = \{0\}$.

Topologie 5

(1) **Remarque :**

Si E était à base dénombrable d'ouverts :

$E' = \bigcup_{i \in I} U_i$ $\quad (U_i)_{i \in E}$ = famille d'ouverts disjoints

est à base dénombrable d'ouverts

On se ramène à l'exercice n° de la feuille 3 : $\exists J \subset I$ dén. tel que $E' = \bigcup_{i \in J} U_i$, mais alors $J = I$ sinon $x \in U_{i, i \notin J}$ et l'on aura sûrement $x \notin \bigcup_{j \in J} U_j$ car $U_i \cap U_j = \emptyset$.

Donc I dénombrable.

Remarques :

E séparable $\not\Rightarrow$ $A \subset E$ séparable

$\exists$ base dénombrable d'ouverts de E $\Rightarrow$ $A \subset E$ est à base dénombrable d'ouverts

En effet $\forall U$ ouvert de E $\quad U = \bigcup_{j \in J} U_j \quad (U_i)_{i \in I}$

$\forall V$ ouvert de A $\quad \exists U$ ouvert de E $\quad V = U \cap A$

$V = \bigcup_{j \in J} (U_j \cap A)$

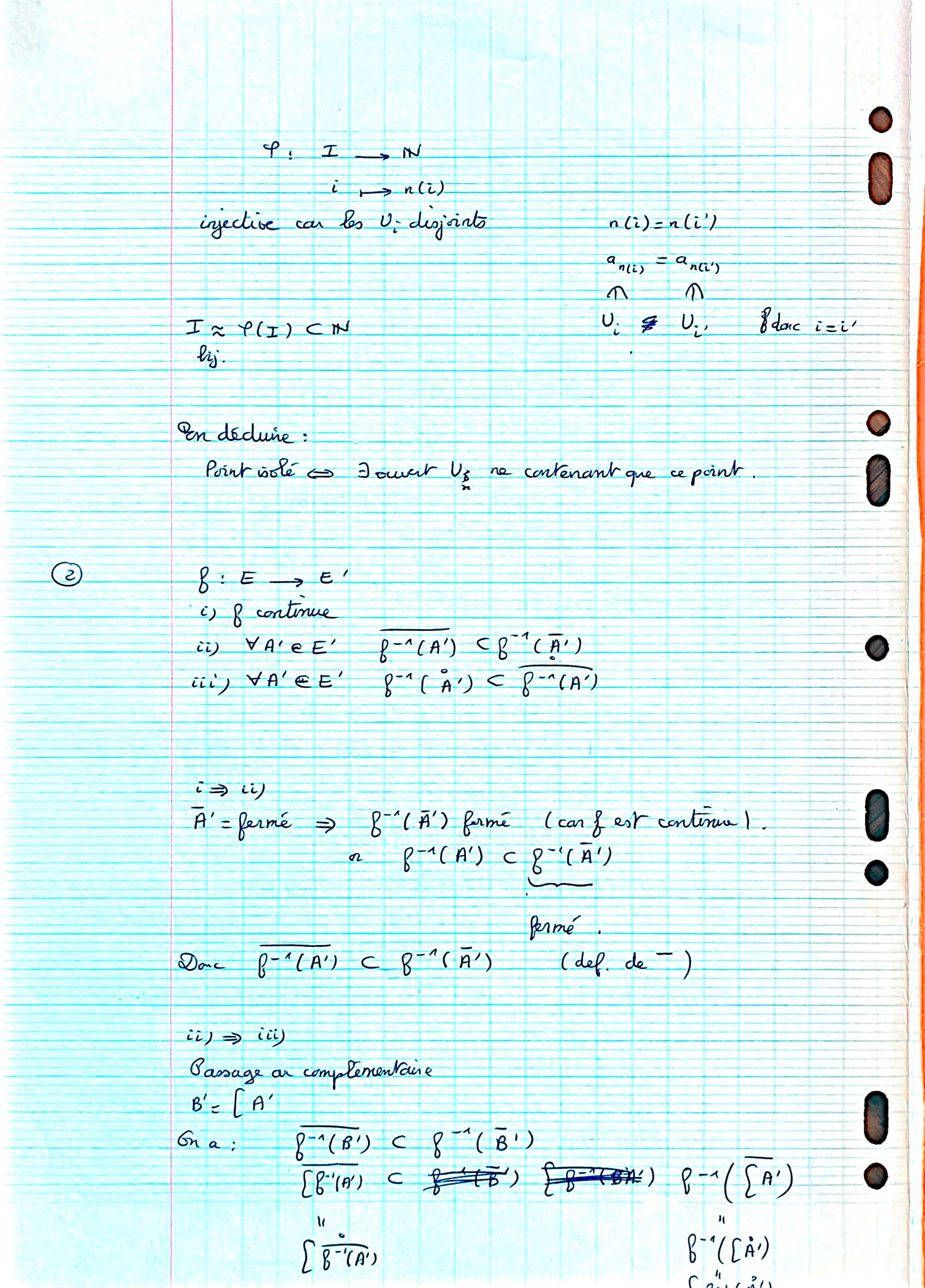
donc : base de A : $(U_i \cap A)_{i \in I}$.

Démonstration :

$A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ $\quad \bar{A} = E$

$(U_i)_{i \in I}$ famille d'ouverts disjoints de E non vides.

$\forall i \in I \quad \exists n(i) \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n(i)} \in U_i$



$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{N}$

$i \longmapsto n(i)$

injective car les U_i disjoints

$n(i) = n(i')$

$a_{n(i)} = a_{n(i')}$

$\cap \quad \cap$

$U_i \neq U_{i'}$ ~~donc~~ $i = i'$

$I \approx \varphi(I) \subset \mathbb{N}$

bij.

En déduire :

Point isolé $\Leftrightarrow$ $\exists$ ouvert U_x ne contenant que ce point.

(2)

$f : E \longrightarrow E'$

i) f continue

ii) $\forall A' \in E' \quad \overline{f^{-1}(A')} \subset f^{-1}(\overline{A'})$

iii) $\forall A' \in E' \quad f^{-1}(\mathring{A'}) \subset \overbrace{f^{-1}(A')}^{\circ}$

i $\Rightarrow$ ii)

$\overline{A'}$ = fermé $\Rightarrow$ $f^{-1}(\overline{A'})$ fermé (car f est continue).

or $f^{-1}(A') \subset \underbrace{f^{-1}(\overline{A'})}_{\text{fermé}}$.

Donc $\overline{f^{-1}(A')} \subset f^{-1}(\overline{A'})$ (déf. de $^{-}$)

ii) $\Rightarrow$ iii)

Passage au complémentaire

$B' = \complement A'$

On a : $\overline{f^{-1}(B')} \subset f^{-1}(\overline{B'})$

$\overline{\complement f^{-1}(A')} \subset$ ~~$f^{-1}(\overline{B'})$~~ ~~$\complement f^{-1}(\overline{A'})$~~ $f^{-1}(\overline{\complement A'})$

$\complement \overbrace{f^{-1}(A')}^{\circ} = \overline{\complement f^{-1}(A')}$

$f^{-1}(\complement \mathring{A'}) = f^{-1}(\overline{\complement A'})$

$\complement f^{-1}(\mathring{A'})$

Donc : $\overline{f^{-1}(\mathring{A'})} \supset f^{-1}(\mathring{A'})$

iii) ⇒ i)

Soit V ouvert. $V = \mathring{V}$

On applique iii) : $f^{-1}(V) \subset \overline{f^{-1}(\mathring{V})} \subset f^{-1}(V)$

donc $f^{-1}(V) = \overline{f^{-1}(\mathring{V})}$

⇓

$f^{-1}(V)$ ouvert.

<u>Rabiot</u> :

L'inclusion de ii) est stricte

f continue

A'

$\overline{f^{-1}(A')}$

$f^{-1}(\bar{A'})$

On a bien $\overline{f^{-1}(A')} \subsetneq f^{-1}(\bar{A'})$

③ (E, d)

$d_1(x,y) = \text{Inf}(1, d(x,y))$

1°/

* $d_1 : E \to \mathbb{R}_+$
* $d_1(x,y) = 0 \iff x = y$ trivial
* $d_1(x,y) = d_1(y,x)$

Seule l'inégalité triangulaire va poser un problème :

*

$d_1(x,z) \leq d_1(x,y) + d_1(y,z)$

$d_1(x,z) = \mathrm{Inf}(1, d(x,z))$

$\leq \mathrm{Inf}(1, d(x,y) + d(y,z))$

$\leq \mathrm{Inf}(1, d(x,y)) + \mathrm{Inf}(1, d(y,z))$ (s'en persuader en faisant tous les cas

vrai.

2°/ $(E, d) \xrightarrow{Id} (E, d_1)$ homéomorphisme ?

(homéomorphisme de $E \to E$ ⟺ <u>même</u> topologie dans E)

↓

$B_d(x, \varepsilon) \subseteq B_{d_1}(x, \varepsilon)$

↓

elles coïncident si $\varepsilon \leq 1$

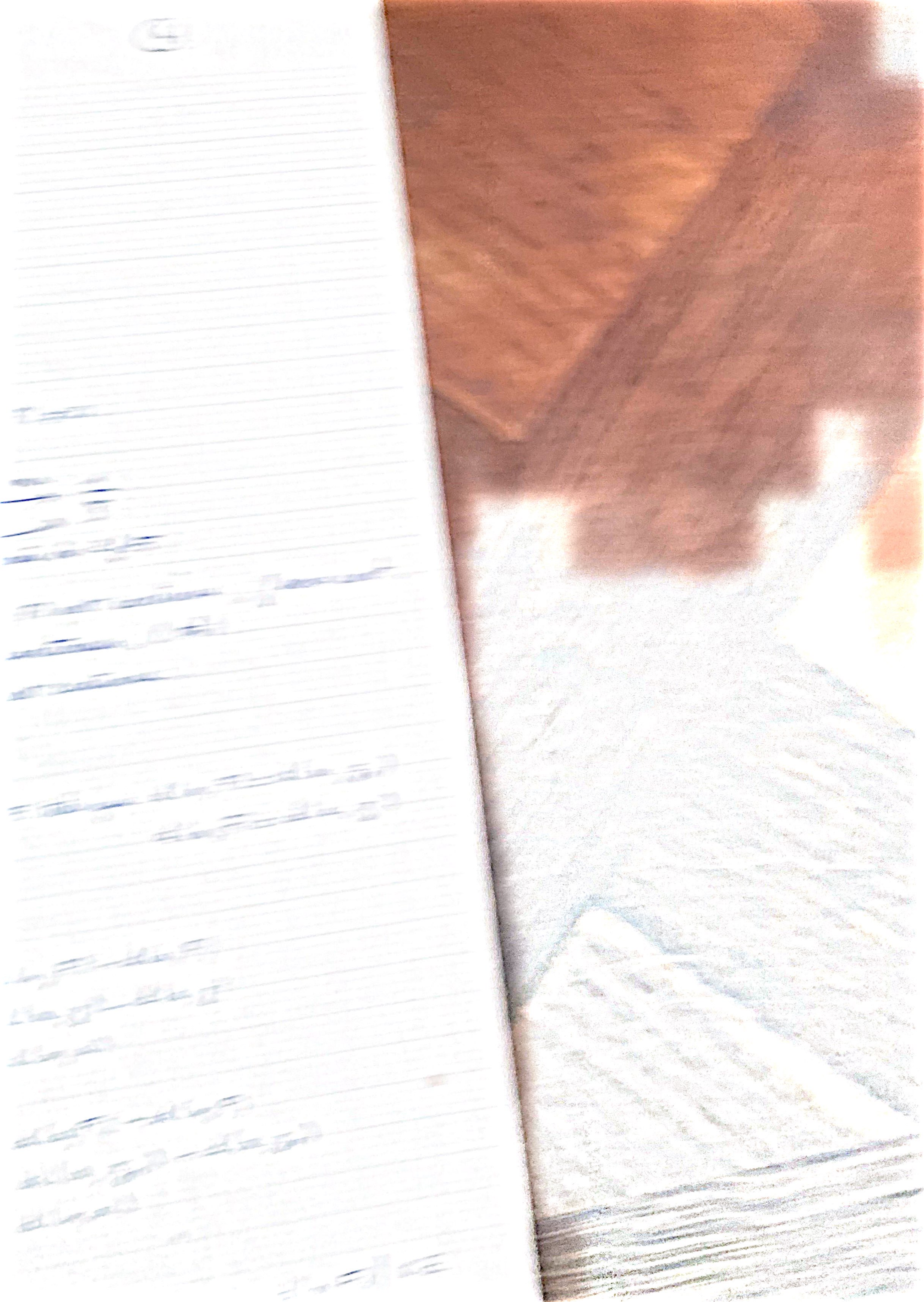
On a égalité des petites boules ⟹ toute boule de l'une des distances est incluse, et contient une boule de pour l'autre distance ⟹ m̂ topologie (c.à.d les ouverts sont les mêmes)

NB : $Id : E^{T_1} \longrightarrow E^{T_2}$ homéomorphisme

⇕

les topologies T_1 et T_2 sont les m̂.

En effet, Tout ouvert O_2 pour T_2 sera aussi un ouvert pour T_1 et réciproquement. (voir cours)



Théorème du cours

f cont $\Rightarrow$ Graphe(f) = fermé de $E \setminus F \times \mathbb{R}$
ouvert à priori.

important. Fermé dans $E \setminus F \times \mathbb{R}$. Reste à montrer que c'est un fermé de $E \times \mathbb{R}$. Voir 1.bis

Il faut montrer que graphe(f) = fermé de $E \times \mathbb{R}$ (et non de $E \setminus F \times \mathbb{R}$).
regardez 1 bis

Conclusions

Soit U un ouvert de E

$E \setminus U = F$ fermé de E

Alors $f : U \longrightarrow$ graph $f \subset E \times \mathbb{R}$

$x \longmapsto \left(x, \dfrac{1}{d(x,F)}\right)$ est un homéomorphisme de U sur graphe(f).

En effet :

f est continue car $U \to E$, $x \mapsto x$ cont et $x \mapsto \dfrac{1}{d(x,F)}$ cont, $U \to \mathbb{R}$

f est bijective (trivialement.)

f^{-1} est continue car : f^{-1} : graph $f \subset E \times \mathbb{R} \longrightarrow U$

$(x,y) \longmapsto x$, $(x,y) \in$ Graphe f

$(x,y) \in$ graphe $f \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{d(x,F)}$

On prend la norme sur $E \times \mathbb{R}$: $\|(x,y)\| = \sup(\|x\|, |y|)$ et c'est gagné !

Application

$E = \mathbb{R}$

$F = \mathbb{R} \setminus]-1,1[$

(schéma : U entre -1 et 1, 0, x, $\mathbb{R}$)

$d(x,F) = \text{Inf}(1-|x|, 1+|x|)$

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 1 / \text{Inf}(\overbrace{1-|x|}^{1-x}, \overbrace{1+|x|}^{1+x})$

$x \in U$
graphe(f) $\downarrow$
$\dfrac{1}{1+x} = y$ de $]-1,0]$
$\dfrac{1}{1-x} = y$ de $[0,1[$

Graphe f : (schéma, axes $\mathbb{R}$, 0, -1, 1, $\mathbb{R} = E$)

$(x,y) \notin G$ $(x,y) \in E \times \mathbb{R}$

$\forall x_0 \in E \setminus F$ $y \neq f(x)$ et $(x,y) \in ((E-F) \times \mathbb{R}) - G$

G : fermé de $(E-F) \times \mathbb{R}$

ouvert de $(E-F) \times \mathbb{R}$

$\Downarrow$

ouvert de $E \times \mathbb{R}$ (car $E \setminus F \times \mathbb{R}$ ouvert de $E \times \mathbb{R}$)

$\forall x_0 \in F$

$\exists$? voisinage ouvert de (x_0, y_0) dans $(E \times \mathbb{R})$ qui ne rencontre pas G

$B(x_0, \varepsilon) \times]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[$

Soit $\begin{cases} x \in B(x_0, \varepsilon) \\ y \in]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[\end{cases}$

$\Downarrow$

cas possibles :

Si $x \in F$ $(x,y) \notin G$

Si $x \in E - F$ $y \neq f(x)$

$f(x) = \dfrac{1}{d(x,F)} > \dfrac{1}{\varepsilon}$ pour $x \in B(x_0, \varepsilon)$ ε fixé > 0.

$d(x,F) \leq d(x, x_0) < \varepsilon$ ($x_0 \in F$)

ε étant fixé positif, on aura donc $x \in B(x_0, \varepsilon) \Rightarrow f(x) > \dfrac{1}{\varepsilon}$

Il suffira de prendre $y_0 + \alpha < \dfrac{1}{\varepsilon}$, $\alpha > 0$ (possible pour ε assez petit) pour vrai que $y \in]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[$

$\Downarrow$

$y < \dfrac{1}{\varepsilon} < f(x)$

donc $f(x) \neq y$ sur $B(x_0, \varepsilon) \times]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[$

$y_0 - \alpha$; y_0 ; $y_0 + \alpha$; $\frac{1}{\varepsilon}$; $f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$; x_0

② façon :

On se fixe α ~~quelque~~ > 0.

Alors $d(x, F) \leq d(x, x_0)$ ... etc.

Il vaut peut-être mieux que α est fixé à l'avance ($\alpha > 0$), alors que si l'on se fixe ε à l'avance comme nous l'avons fait p ci-dernière

(5) E et E' deux espaces métriques (d et d')

$f : E \to E'$ bijective

$\left\{\begin{array}{l} E' \text{ complet} \\ f \text{ uniformément cont.} \\ f^{-1} \text{ cont} \end{array}\right.$ alors E est complet

Soit (x_n) une suite de Cauchy dans E.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad n > m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Comme f est uniformément continue

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta(\varepsilon) > 0 \quad |x_n - x_m| < \eta \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad n > m > N \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$

Ce qui montre que $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy dans E' qui est complet

Donc $f(x_n)$ converge vers l dans E' :

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l \in E'$$

Or $\left\{\begin{array}{l} E' = \text{espace métrique} \\ f^{-1} \text{ continue} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Pour toute suite (y_n) de E' convergeant vers l on aura $f^{-1}(l) = \lim_{n \to +\infty} f(y_n)$.

On applique ce résultat à la suite $(f(x_n))_n$ de E' :

$$\lim f(x_n) = l \underset{\left(\substack{E' \text{ esp. met} \\ f^{-1} \text{ cont}}\right)}{\Rightarrow} \lim f^{-1}(f(x_n)) = f^{-1}(l) \in E$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim x_n = f^{-1}(l)$$

donc (x_n) converge dans E. E = Banach.

CQFD

<u>Remarque</u> : si l'on met f^{-1} uniformément continue dans les hypothèses, on tombe sur le cours, à savoir que si f est biuniformément continue, les suites de Cauchy se correspondent et si E' est complet, alors E le sera aussi.

f bi-uniformément continue $f : E \to E'$	$\Leftrightarrow$	E complet $\Updownarrow$ E' complet

⑥ E = espace topologique non vide

1) | E séparé $\iff$ $\forall x \in E$ Intersection de tous les voisinages fermés de x est réduite à $\{x\}$ |
|---|

<u>Preuve</u>

($\Rightarrow$) $\bigcap_\alpha V_\alpha$ V_α = voisinage fermé de x

Soit $y \in \bigcap_\alpha V_\alpha$ et $y \neq x$. Comme E est séparé, on sait qu'il existe deux ouverts U_x et U_y contenant respectivement les points x et y, et disjoints.
Considérons alors $\overline{U}_x$ (qui est un voisinage fermé de x).
On constate que $y \notin \overline{U}_x$ car sinon il existerait une intersection non vide à $U_x \cap \underbrace{U_y}_{\text{vois. de } y}$ (d'après la déf. m̂ de l'adhérence). Ainsi $y \neq x \Rightarrow y \notin \bigcap_\alpha V_\alpha$

On en déduit que $y = x$ forcément : $\bigcap_\alpha V_\alpha = \{x\}$, V_α = vois. fermé de x

($\Leftarrow$) Soit $y \neq x$ $x, y \in E$

L'intersection de tous les voisinages fermés de y se réduit à $\{y\}$. Donc il existe un voisinage fermé V de y tel que $x \notin V$. Alors $\mathring{V}$ est un voisinage ~~ouvert~~ de y et $\complement V$ = ouvert contenant x. Donc $\complement V$ = vois. de x.
Ainsi nous avons trouvé V vois. de y, $\complement V$ vois. de x et $V \cap \complement V = \emptyset$.

Donc E est <u>séparé</u>.

CQFD

<u>Rappel de ces propriétés</u> :

E séparé $\iff$ $\underline{H_1 \iff H_2}$ (Propriété d'Hausdorff)

$\Downarrow$

$K_1 \iff K_2$

En notant : ...

(page 3)

(H_1) : a et b étant 2 points distincts de E, il existe des voisinages de a et b respectivement qui sont disjoints

⇕

(H_2) : Pour tout $a \in E$ l'intersection des voisinages fermés de a se réduit à $\{a\}$

⇓

(K_1) Tout ensemble réduit à 1 point est fermé

⇕

(K_2) $\forall a \in E$ l'intersection de tous les voisinages de a se réduit à $\{a\}$

Retour à l'exo

2) E non dénombrable muni de la topologie dont les ouverts sont dans $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{O} = \{ \emptyset \; ; A \subset \mathcal{P}(E) \; / \; \complement_E^A \text{ dénombrable} \}$$

$\mathcal{O}$ définit bien une topologie :
- $\emptyset, E \in \mathcal{O}$
- $\bigcup E_i$: $\complement \bigcup E_i = \bigcap \complement E_i$ dén.
- $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ (int. finie !) : $\complement \bigcap E_i = \bigcup \complement E_i$ = dén. (↑ finie)

$\forall x \in E$ l'affirmation (H_2) est vraie

Soit $y \neq x$.

$\exists A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\begin{cases} y \notin A \\ \complement A \text{ dénombrable} \\ x \in A \end{cases}$ (il suffit de prendre $A = \{x\} \cup E \setminus \{y\}$. Alors $\complement A = \complement\{x\} \cap \{y\} = \{y\}$ dénombr.)

Or A = ouvert contenant x.

Donc $y \neq x \Rightarrow y \notin \bigcap$ ~~ouvert~~ vois. de x

donc $\bigcap \{\text{vois. de } x\} = \{x\}$

(1) Autre démonstration par l'absurde

$\forall x, y \in E$ $x \neq y$ $\exists V(x)$ $V(y)$ telque $V(x) \cap V(y) = \emptyset$

$\Rightarrow \underbrace{\complement V(x)}_{\text{dén}} \cup \underbrace{\complement V(y)}_{\text{dén}} = \underbrace{E}_{\text{non dén par hyp.}}$

Donc faux.

Et pourtant E n'est pas séparé (cf (1) aussi)

Soient $x, y \in E$. Soit $x \in A$ (A ouvert de $\mathcal{O} \neq \emptyset$)

Alors, de 2 choses l'une : a) Si $y \in A$ on aura $x, y \in A$

b) Si $y \notin A \Rightarrow y \in \complement A$ dénombrable

et $\forall B$ ~~ouvert~~ contenant y et inclus dans $\complement A$, on aura B dénombrable donc $\complement B$ non dén. donc B <u>non ouvert</u>.

$\Rightarrow \nexists$ ouvert contenant y sans couper A ouvert contenant x.

3) Soit $A \subset E$ $\quad$ a = point d'accumulation de A

E séparé V = voisinage de a $\quad \Rightarrow V \cap A$ infini

a pt d'accumulation de A $\Longleftrightarrow$ $\forall$ voisinage V de a : $V \cap A \ni x \ (\neq a)$

<u>Preuve</u>

comme a est pt d'acc. de A $\quad \exists x_1 \in A \cap V$. $\quad x_1 \neq a$

Comme E est séparé, il existe un voisinage V_1 de x_1 et un voisinage V^1 de a tels que $V_1 \cap V^1 = \emptyset$

Alors $V^1 \subset V$ on recommence avec V^1

V^1 voisinage de a

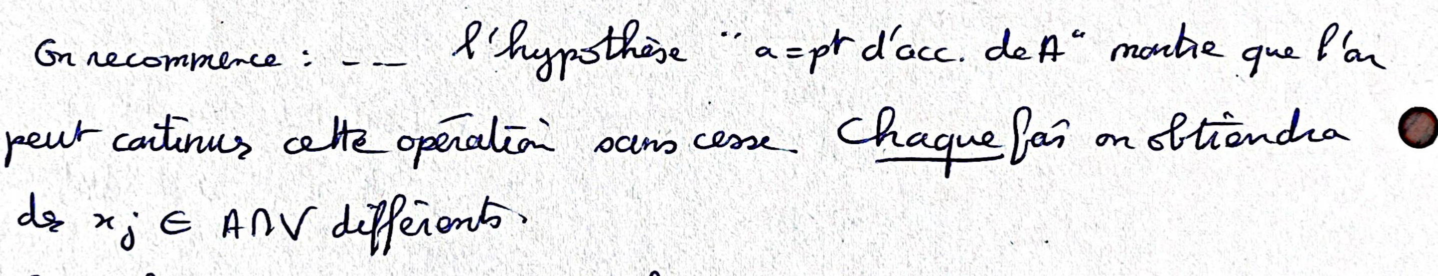
$\Downarrow$

$\exists x_2 \in A \cap V^1 \subset A \cap V$

et $x_2 \neq a$

on recommence

Comme E est séparé, il existe un vois. V_2 de x_2 et un voisinage V^2 de a tels que $V_2 \cap V^2 = \emptyset$



On recommence : --- l'hypothèse "a=pt d'acc. de A" montre que l'on peut continuer cette opération sans cesse. <u>Chaque</u> fois on obtiendra des $x_j \in A \cap V$ différents.

En conclusion, donc $V \cap A$ est infini.

<u>Remarque</u>: On peut prendre l'hypothèse $\forall x \in E$ $\{x\}$ = fermé de E au lieu de E séparé. Car cela.

$\exists V$ vois. de a ne contenant pas x.

4) Sur $[0,1[= E$

a) Topologie dont les ouverts sont les intervalles de la forme $[0,\alpha[$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$

* $\emptyset = [0,0[$ $\overbrace{[0,1[}^{E} = [0,1[\in \mathcal{O}$
* $\bigcup [0,\alpha[= [0,\beta[$ $(\beta = \operatorname{Sup} \alpha)$
* $\bigcap_{\text{finie}} [0,\alpha[= [0,\beta[$ oui

b) Topologie séparée ?

Sûrement pas : $0 \in [0,\alpha[$ $\forall \alpha \in [0,1]$ et $\alpha \neq 0$

" Tout ouvert non vide contient 0 "

donc, ~~si a~~ la topologie n'est pas séparée. (Prendre $a \in E$, $a \neq 0$ et 0)

c) Fermés de cette topologie

Ce sont tous les ensembles dont les complémentaires sont de la forme $[0,\alpha[$

c.à.d les intervalles de la forme $[\alpha, 1[$.

d) $I = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ (ni fermé, ni ouvert pour cette topologie)

Détermination de $\bar{I}$

Plus petit des fermés contenant I : manifestement $[\frac{1}{4}, 1[= \bar{I}$

Détermination de $\mathring{I}$

Plus grand ouvert contenu dans I : manifestement $\emptyset = \mathring{I}$

e) Points d'accumulation de $A = \{0\}$

* Soit $x \in E$ $x \neq 0$, soit $[0,\alpha[$ un ouvert quelconque contenant x.

Alors $0 \in [0,\alpha[$ et $0 \neq x \Rightarrow$ x est point d'accumulation de A

* Si $x = 0$ on aura $[0,\alpha[\cap A = 0 = x$ donc x ne sera pas pt d'acc. de A.

Encl : en notant PtA cet ensemble : $\boxed{\text{PtA} =]0,1[}$

C1 Topologie

Feuille n° 6

(I) Soit E un espace métrique compact. Montrer que pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de E, il existe $\varepsilon>0$ tel que :

$$\forall x \in E \;,\; \exists i \in I \;:\; B(x;\varepsilon) \subset U_i .$$

×

(II) Soient (E,d) un espace métrique compact et $(f_n)_n$ une suite d'applications de (E,d) dans un espace métrique (E',d') telles que :

$$\forall n \;,\; \forall x,y \in E \qquad d'(f_n(x), f_n(y)) \leq d(x,y)$$

$$\forall x \in E \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existe soit } f(x).$$

×

Montrer que : $\forall n$, $\forall x,y \in E$ $\quad d'(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$ et que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

(III) Soient E un espace compact, $(f_n)_n$ et f des applications continues de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

$$\forall x \in E \qquad |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ en décroissant}.$$

×

Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

Application : Lemme de Dini : cas où $(f_n)_n$ est une suite croissante de fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$ convergeant ponctuellement vers une fonction continue f.

(IV) Soient E un espace métrique, K un sous-ensemble compact de E et F un fermé de E. Montrer qu'on a l'équivalence :

$$d(K,F) = 0 \iff K \cap F \neq \emptyset.$$

×

(V) Soient E un espace topologique, E' un espace topologique compact et $f : E \to E'$. Montrer qu'on a l'équivalence :

$$f \text{ continue} \iff \text{graphe de } f \text{ fermé de } E \times E'.$$

×

(VI) Soit E un espace métrique compact et soit f une application continue de E dans E. Posons $E_n = f^{(n)}(E)$.

×

a) Que dire de $K = \bigcap_n E_n$?

b) Que dire des valeurs d'adhérence de la suite $x_n = f^{(n)}(x)$, $x \in E$?

c) Montrer que si f est une isométrie, elle est surjective.

II ⑦ Montrer qu'aucun point de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$ (muni de la norme de la convergence uniforme) ne possède de voisinage compact.
Pour cela, on pourra considérer la suite $(f_n)_n$ de fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ linéaires par intervalles telles que : ×

$$f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{2n+2}\right) = 0 \qquad f_n\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 1 \qquad f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = f_n(1) = 0$$

III ⑧ Montrer que les compacts K de l^p sont caractérisés par les propriétés suivantes :

1) K est borné et fermé ?

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0$ tq $\forall N \geq N_0$ et $\forall x = (x_n)_n \in K$ $\left(\sum_{n>N} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$

⑨ Soient (E, d) un espace métrique compact, (E', d') un espace métrique et $f : E \to E'$ localement lipschitzienne (i.e $\forall x \in E$ $\exists B(x ; \varepsilon(x))$ et $\exists K_x > 0$ t.q $d'(f(y), f(y')) \leq K_x \, d(y, y')$ $\forall y, y' \in B(x ; \varepsilon(x))$). ×
Montrer que f est lipschitzienne.

⑩ Sur l'ensemble des parties compactes d'un espace métrique (E, d) on définit $\delta(K, K') = \max\left(\sup_{x \in K} d(x, K'), \sup_{x' \in K'} d(K, x')\right)$. ×
Montrer que δ est une distance sur cet ensemble.

Topologie TD n°6

Énoncés

① Soient E un espace métrique compact et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E. Alors montrer l'assertion :

$$\exists \varepsilon>0 \quad \forall x\in E \quad \exists i\in I \quad B(x,\varepsilon)\subset U_i \qquad (1)$$

Nous savons que l'assertion suivante est trivialement vérifiée :

$$\forall x\in E \quad \exists\, \varepsilon(x)>0 \quad \exists\, i(x)\in I \;/\; B(x,\varepsilon(x))\subset U_{i(x)}$$

Le tout est de savoir s'il existe $\varepsilon>0$ tel que :

$$\forall y\in E \quad \exists x\in E \quad B(y,\varepsilon)\subset B(x,\varepsilon(x))\subset U_{i(x)} \qquad (2)$$

Montrons donc que (2) est vérifiée pour ε convenable.

Considérons les $B(x_k,\frac{\varepsilon(x)}{2})$: $\bigcup_{x\in E} B(x,\frac{\varepsilon(x)}{2}) = E$

Comme E est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini de ce recouvrement $\left(B(x,\frac{\varepsilon(x)}{2})\right)_{x\in E}$. Soit $E=\bigcup_{k=1}^{n} B(x_k,\frac{\varepsilon(x_k)}{2})$

Posons $\varepsilon = \mathrm{Inf}\left(\frac{\varepsilon(x_k)}{2}\right)$; $y\in E$: $\exists k$ tel que $y\in B(x_k,\frac{\varepsilon(x_k)}{2})$

Alors $z\in B(y,\varepsilon) \Rightarrow z\in B(x_k,\varepsilon(x_k))$

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad$ $\Uparrow$ car

$d(y,z)<\varepsilon \qquad d(z,x_k)\leq \underbrace{d(y,z)}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(y,x_k)}_{<\frac{\varepsilon(x_k)}{2}}$

$< \varepsilon(x_k)$

(2) est donc vérifiée

$\Downarrow$

(1)

CQFD

② (E,d) : métrique compact. (E',d') : métrique

Soit $f_n : E \to E$ vérifiant $d'(f_n(x), f_n(y)) \leq d(x,y)$

(Lipschitzienne)

On suppose que l'on a la convergence ponctuelle : $\lim f_n(x) = f(x)$

1) Montrer que $\forall x,y \in E \quad d'(f(x),f(y)) \leq d(x,y)$.

2) Montrer que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ uniformément (c.à.d $D(f_n, f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$)

(Remarque : $C^\infty(E,E')$ (fcts cont. et bornées) $= C(E,E')$ si E compact }, et l'on note

$D(f,g) = \sup_{x\in E} d'(f(x), g(x))$)

(Rappel : Pro 4 : $f : E \to E'$ cont, A compact, E' séparé $\Big\} \Rightarrow f(A)$ compact

③ (E,d) métrique compact $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ continues. On suppose encore la convergence ponctuelle $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, et que, de plus,

$\forall x \in E \qquad |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en décroissant

(c.à.d $n \nearrow \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \searrow$)

1) Montrer que $f_n \to f$ uniformément

2) En déduire le lemme de ~~Dimitri~~ Dini : " Si $(f_n)_n$ est une suite croissante de fcts continues de E (métrique compact) dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fct continue f, alors elle ~~est~~ ~~u~~ converge unifo[rmément]."

NB : Penser à regarder pour $\varepsilon > 0$, les ensembles $E_n = \{x \in E \,/\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$

Solutions sur la feuille 2 : →

Solutions Proposées

②

1)

Traduisons la convergence ponctuelle de $f_n \to f$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \quad \exists N \quad n > N \Rightarrow d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall y \quad \exists N' \quad n > N' \Rightarrow d'(f_n(y), f(y)) < \varepsilon$$

Alors :

$$d'(f(x), f(y)) \leqslant \underbrace{d'(f(x), f_n(x))}_{< \varepsilon} + \underbrace{d'(f_n(x), f_n(y))}_{\leqslant d(x,y)} + \underbrace{d'(f_n(y), f(y))}_{< \varepsilon}$$

(car f_n Lipschitzienne de coef. $K=1$)

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad d'(f(x), f(y)) < 2\varepsilon + d(x,y)$$

Passons à la limite quand $\varepsilon \to 0_+$

$$\boxed{d'(f(x), f(y)) \leqslant d(x,y)}$$

CQFD

2) Montrer que $f_n \xrightarrow[n\,\infty]{} f$ uniformément

ⓐ Montrons la propriété localement.

P_ε local : $\forall \varepsilon \ \forall x_0 \in E \quad \exists \underbrace{V_{x_0}}_{\text{vois. ouvert de } x_0} \quad \exists N_{x_0} \quad \forall n \geqslant N_{x_0} \Rightarrow \sup_{x \in V_{x_0}} \{d'(f_n(x), f(x))\} < \varepsilon$

Soit ε donné

Prenons $V_{x_0} = B\left(x_0, \frac{\varepsilon}{3}\right)$.

Comme $f_n \to f$ ponctuellement : $n > N(x_0) \Rightarrow d'(f_n(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$

Soit $x \in V_{x_0} = B\left(x_0, \frac{\varepsilon}{3}\right)$

Alors : $d'(f_n(x), f(x)) \leqslant \underbrace{d'(f_n(x), f_n(x_0))}_{\leqslant d(x, x_0) < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d'(f_n(x_0), f(x_0))}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{d'(f(x_0), f(x))}_{\leqslant d(x,x_0) < \frac{\varepsilon}{3}}$

$d'(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon \qquad \forall x \in V_{x_0} = B\left(x_0, \frac{\varepsilon}{3}\right)$. ($\varepsilon$ ne dépendant que de x_0)

P_ε est donc vérifiée localement :

Rappelons que P_ε local :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x_0 \in E \quad \exists V_{x_0}$ vois. ouv. de x_0 et $\exists N_{x_0}$

$$n \geq N_{x_0} \Rightarrow \sup_{x \in V_{x_0}} d'(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

② <u>Passage de la "propriété locale" à la "propriété est vraie sur tout E compact".</u>

Soit ε donné à l'avance : $\varepsilon > 0$

Alors :

(1) $\forall x_0 \in E \quad \exists V_{x_0} \quad \exists N_{x_0} \quad n \geq N_{x_0} \Rightarrow \sup_{x \in V_{x_0}} d'(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$

Les $(V_{x_0})_{x_0 \in E}$ forment un recouvrement ouvert de E. Comme E est compact, on peut y extraire un sous-recouvrement fini, soit :

$$(V_{x_0^i})_{i \in [1,n]} \qquad (n \text{ fixé} \in \mathbb{N})$$

On écrira alors n fois la relation (1).

$\forall x \in E \quad \exists i \in [1,n]$ tel que $x \in V_{x_0^i}$

donc $\exists N_{x_0^i} \quad n \geq N_{x_0^i} \Rightarrow \sup_{x \in V_{x_0^i}} d'(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$

Prenons $N = \inf_{i \in [1,n]} N_{x_0^i}$

Alors nous aurons bien :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = \inf_{i \in [1,n]} N_{x_0^i}$ tq : ~~$n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in E} d'(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$~~

$\underbrace{\forall x \in E \qquad n \geq N \Rightarrow d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon}$

$\Updownarrow$

$$n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in E} d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

CQFD

Remarque : Propriété P à montrer sur un espace compact. En général :

a) La montrer localement

b) Puis recouvrir E par 1 nbre fini de ces voisinages. Conclure

C'est exactement la méthode que nous avons employé pour résoudre l'exercice

② : P_ε $\exists N$ $n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in E} d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

P_ε local $\forall x_0 \in E$ $\exists V_{x_0}$ (vois. ouvert de x_0) $\exists N_{x_0}$ $n \geq N_{x_0} \Rightarrow \sup_{x \in V_{x_0}} d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

(Solution)

③

1) Utilisation de la NB

Posons $E_n = \{x \in E / \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$

Nous avons manifestement $E_n = (f_n - f)^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[)$, qui est donc un ouvert de E (puisque $f_n - f$ continue et $]-\varepsilon, \varepsilon[$ ouvert)

Remarquons que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E$. En effet, l'hypothèse de convergence ponctuelle nous dit que $\forall x \in E$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \exists n > N$ tel que $x \in E_n$. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ est donc un recouvrement d'ouvert de E.

Comme nous supposons que $|f_{n+1} - f(x)| \leq |f_n - f(x)|$ nous aurons la situation :

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E$$

E étant compact, on aura $E_N = E$ pour $N \in \mathbb{N}$ fixé. Ainsi, à partir du rang N, on aura : $E_N = E_{N+1} = \cdots = E$

Donc $E_N = E_{N+1} = \cdots = E$

$\quad\ \ \shortparallel$

$\{x \in E / \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$ ...

donc $\forall x \in E = E_p$ $(p \in [N, +\infty[)$ on aura $|f_p(x) - f(x)| < \varepsilon$

En conclusion : $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $p \geq N \Rightarrow \sup_{x \in E} |f_p(x) - f(x)| < \varepsilon$

ce qui démontre la convergence uniforme de f_n

2) Lemme de Dini

$$\left\{\begin{array}{l} f_n : E \text{ métrique compact} \to \mathbb{R} \quad \text{continue} \\ (f_n)_n \text{ suite croissante} \\ f_n \to f \text{ ponctuellement et } f \text{ continue} \end{array}\right\} \Rightarrow f_n \to f \text{ uniformément.}$$

En effet, $\forall x \in E$ ~~$f_n(x) - f(x) \leq f_{n+1}(x) - f(x)$~~ (car $f_n \nearrow$ et $f(x) \geq f_n(x)$ $\forall x$)

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

$$-f_n(x) \geq -f_{n+1}(x)$$

$$f(x) - f_n(x) \geq f(x) - f_{n+1}(x) \geq 0$$

$$|f_n(x) - f(x)| \geq |f_{n+1}(x) - f(x)|$$

On obtient bien les m̂ hypothèses qu'au 1).

2- Solution du ③ : Démonstration de la propriété localement, puis passage à E tout entier (grâce à l'hypothèse "E compact")

Soit E compact

$$\lim_{n \to +\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \text{en décroissant.}$$

ⓐ Montrons que

$\forall x_0 \in E$ $\exists U_{x_0}$ voisinage ouvert de x_0 tel que f_n converge unif. vers f sur ce voisinage. En d'autres termes.

Remarque 1 :

$E \longrightarrow (E', d')$ $\mathcal{C}^\infty(E, E')$ continues bornées

e.t   e. métrique

$\Updownarrow$

diam(E) fini $\Leftrightarrow$ f(E) borné

On définit cette distance $D(f,g) = \sup_{x \in E} d'(f(x), g(x))$ (bien définie)

$$\forall x_0 \in E \quad d'(f(x), g(x)) \leq \underbrace{d'(f(x), f(x_0))}_{\delta(f(E))} + d'(f(x_0), g(x_0)) + \underbrace{d'(g(x_0), g(x))}_{\delta(g(E))}$$

$$d'(f(x), g(x)) \leq \delta(f(E)) + \delta(g(E)) + d'(f(x_0), g(x_0))$$

donc $\sup_{x \in E} d'(f(x), g(x))$ est finie.

Si E est compact : $\mathcal{C}^\infty(E, E') = \underbrace{\mathcal{C}(E, E')}_{\text{fcts continues dans } E}$

Remarque 2 : E précompact suffit :

$\Downarrow$

$\exists F$ fini $= \{x_1, \dots, x_\ell\}$ tq $\forall x \in E \quad d(x, F) < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Downarrow$ ← fini

$$E = \bigcup_{i=1}^{\ell} B(x_i, \frac{\varepsilon}{3})$$

Remarque 3 : Refaire le raisonnement de ② par l'absurde :

début : $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N > 0 \quad \exists n \geq N \quad d(f_n, f) \geq \varepsilon$

et $x_n \in E \quad d'(f_n(x_n), f(x_n)) > \varepsilon$

$\forall x_0 \in E$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U_{x_0}$ ~~$\forall \varepsilon > 0$~~ $\exists \overset{N}{\cancel{\delta}} > 0$ $n > N \Rightarrow \sup_{x \in U_{x_0}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$. Considérons $U_{x_0} = B(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$

$$\forall x \in U_{x_0} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)|$$

f_n et f sont continues :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_{x_0} \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow \begin{cases} |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \end{cases}$$

Comme de plus $f_n \to f$ ponctuellement :

$\exists N_{x_0} > 0 \quad n > N_{x_0} \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ où N dépend de x_0.

Ainsi, pour $U_{x_0} = B(x_0, \eta_{x_0})$ et $N > 0$:

$$n > N \Rightarrow \forall x \in U_{x_0} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

La propriété est vraie <u>localement</u>.

(b) <u>Montrons la dans E</u>

Pour ε donné à l'avance, on obtient un recouvrement $(U_{x_0} = B(x_0, \eta_{x_0}))_{x_0 \in E}$ ouvert de E dont on peut extraire un recouvrement fini :

$$(U_{x_i} = B(x_i, \eta_{x_i}))_{i \in [1,n]}$$

Posons ~~$\eta = \inf_i \eta_{x_i}$~~ $N = \sup_i N_{x_i}$

Alors $\forall x \in E$ $\exists i$ $x \in U_{x_i}$. On peut appliquer la prop. localement et :

$$\exists N > 0 \quad \forall x \in E \quad n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

④ E espace métrique
K compact
F fermé

Montrer l'équivalence : $d(K,F)=0 \Leftrightarrow K\cap F \neq \emptyset$

($\Leftarrow$) Évident, puisque : $\exists z \in K\cap F \Rightarrow \begin{cases} d(z,z)=0 \\ d(K,F)=\inf\limits_{x,y\in K\times F} (x,y)=0 \end{cases}$

($\Rightarrow$) Supposons que $d(K,F)=0$

$$\inf_{\substack{x\in K\\ y\in F}} d(x,y)=0$$

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists x_n\in K$ $\exists y_n\in F$ tels que :

$$d(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$$

Considérons la suite $(x_n)_n$. Elle est dans K compact. Donc elle admet au moins une valeur d'adhérence x. Comme E est métrique, il existe une sous suite $(x_{n_k})_k$ convergent vers $x\in K$.

D'autre part, la suite $(y_{n_k})_k$, dans F, converge puisque $x_{n_k}\to x$ $(k\to+\infty)$ et $d(x_{n_k},y_{n_k})<\frac{1}{n_k}$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Comme F est fermé,

$\lim\limits_{k\to\infty}(y_{n_k})=y\in F$.

Comme $d(x_{n_k},y_{n_k})<\frac{1}{n_k}$ $\forall k$, on aura nécessairement $\underset{\substack{\cap\\K}}{x}=\underset{\substack{\cap\\F}}{y}$.

Ainsi $\exists x\in K\cap F \Rightarrow K\cap F\neq\emptyset$

2- démonstration

($\Rightarrow$)

$$d(K,F)=0 \Leftrightarrow \inf_{x\in K} d(x,F) = 0$$

On sait que $\begin{cases} F \text{ fermé de } E \\ \varphi : x \longmapsto d(x,F) \text{ est uniformément continue} \end{cases}$

(voir exercice déjà fait)

Comme K est un compact, $\varphi(K)$ = compact de $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ borné de $\mathbb{R}$, fermé

Donc $\exists\ x_0 \in K$ tel que $\inf_{x\in K} \underbrace{d(x,F)}_{\varphi(x)} = d(x_0,F)$

$$\begin{cases} 0 = d(x_0,F) \ ,\ x_0 \in K \\ F \text{ fermé} \end{cases}$$

Donc $x_0 \in K \cap F$

(5) E = espace topologique

E' = espace " compact

$f : E \to E'$. Montrer que

f continue $\Leftrightarrow$ graphe G de f est fermé dans $E\times E'$

($\Rightarrow$) Cette implication a été vue en cours. (S'y reporter)

($\Leftarrow$)

Soit $x_0 \in E$. Désignons par $V_{f(x_0)}$ un voisinage ouvert de $f(x_0)$ dans E' et

? V_{x_0} un voisinage ouvert de x_0 tel que $f(V_{x_0}) \subset V_{f(x_0)}$?

Soient les couples (x_0,y) tels que $y \neq f(x_0)$. Alors $(x_0,y) \notin G$, G fermé $\Rightarrow$ $(x_0,y) \in \underbrace{\complement_{E\times E'} G}_{\text{ouvert}}$

Il existe donc $U_{x_0}(y) \times V_y \subset \complement_{E\times E'} G$

On a donc $E' = \bigcup V_y \cup V_{f(x_0)}$, or E' est compact, d'où

$E' = \bigcup^{n} V_{y_i} \cup V_{f(x_0)}$. Montrons que U_{x_0} (cherché) $= \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_0}($

En effet, soit $x \in U_{x_0}$. Par l'absurde :

Si $f(x) \notin V_{f(x_0)}$ alors $f(x) \in \bigcup V_{y_i}$

$\exists i \ / \ f(x) \in V_{y_i}$ d'où $(x, f(x)) \in U_{x_0}(y_i) \times V_{y_i} \subset \complement G$

absurde car $(x, f(x)) \in G$ (!)

⑥ E = esp. métrique compact

$f : E \to E$ continue. On pose $E_n = f^n(E)$

a) Que dire de $K = \bigcap_n E_n$?

$\forall n \in \mathbb{N}$ E_n = compact de E $\Rightarrow$ $K = \bigcap_n E_n$ = compact.

De plus $K \neq \emptyset$. En effet, $K = \emptyset \Rightarrow \bigcap_n E_n = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{N} E_n = \emptyset$ (car E compact). Comme, de plus : $E_n \subset E_{n-1}$ (suite décroissante), on aura :

$E_N = \emptyset$, ce qui est faux.

b) <u>Valeurs d'adhérences de la suite $x_n = f^n(x)$ ($x \in E$)</u> ?

$\forall n \in \mathbb{N}$, à partir d'un certain rang N, $x_n \in E_n$

(x_n) = suite de K à partir d'un certain rang, car :

$E_n \setminus K$ est une suite décroissante dans E. De plus :

$$\cdots \supset (E_n \setminus K) \supset (E_{n+1} \setminus K) \supset \cdots \supset \underbrace{\left(\bigcap E_n\right) \setminus K}_{= \emptyset}$$

~~Donc~~ $\left(\bigcap_n E_n\right) \setminus K = \left(\bigcap_n (E_n \setminus K)\right) = \emptyset \underset{(E\ \text{comp})}{\Rightarrow} \bigcap_{n \geq 1}^{N \leftarrow \text{fini}} (E_n \setminus K) = \emptyset$

donc (comme la suite st décr) $E_N \setminus K = \emptyset \Leftrightarrow E_N = K$.

Comme K est <u>compact</u> : (x_n) possède au moins 1 val. d'adhérence dans K

c) <u>f isométrie $\Rightarrow$ surjective</u>

$\forall x \in E$ $f^n(x)$ = suite de E qui possède une valeur d'adhérence a dans K

Ainsi $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n$ tel que $d(f^n(x), a) < \varepsilon$

$a \in K \Rightarrow \exists y \in E$ $a = f^{n+1}(y)$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n$ $d(f^n(x), f^{n+1}(y)) < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ $d(x, f(y)) < \varepsilon$ $\Rightarrow$ ~~$x = f(y)$ donc $x \in f(E)$.~~

2-dém : (x_{n_k}) de Cauchy

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists K$ $k_1 > k_2 \geq K$

$\Downarrow$

$d(x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}) < \varepsilon$

$d(f^{(n_{k_1} - n_{k_2})}(x), x) < \varepsilon$

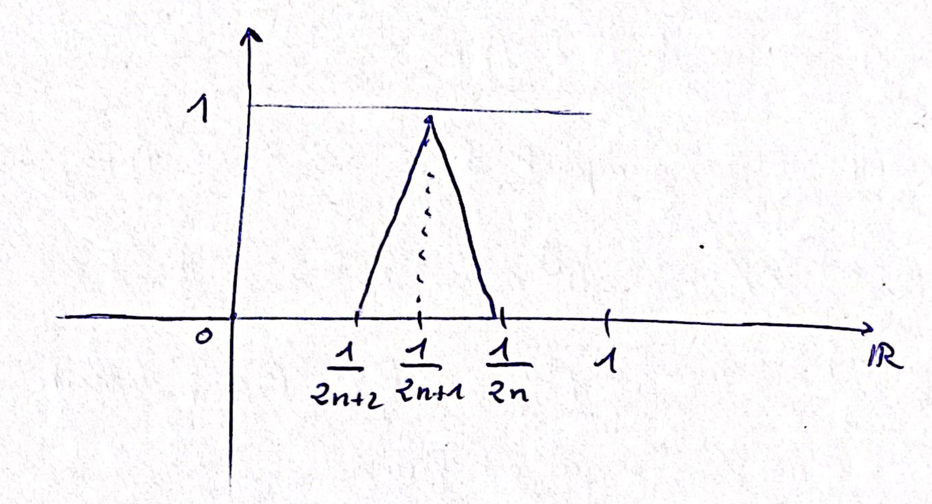
~~d~~ $\forall \varepsilon$ $d(x, f(E)) < \varepsilon$

$d(x, f(E)) = 0 \Rightarrow$ ~~d~~ $x \in f(E)$ (fermé)

⑦ Espace vectoriel normé (Banach) suivant :

$(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I), \| \|_\infty)$ $\qquad \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} \|f(x)\|_{\mathbb{C}}$

Soit $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$



a) Etude en 0 (application nulle)

On considère la suite de fcts dans $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$:

$$\begin{cases} f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{2n+2}\right) = 0 \\ f_n\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 1 \\ f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = f_n(1) = 0 \end{cases}$$

On a $\quad \|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \|f(x)\|_{\mathbb{C}} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $f_n \in \bar{B}(0,1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (boule fermée de centre l'application nulle, et de rayon 1)

Montrons que $\bar{B}(0,1)$ n'est pas compacte : ~~tout revient~~ Il suffit de montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui est dans $\bar{B}(0,1)$, ne possède aucune valeur d'adhérence.

Si f est pt d'adhérence de la suite $(f_n)_n$, on aurait :

$\forall \cdot B(f, \varepsilon) \quad \forall N > 0 \quad \exists n > N$ tel que $f_n \in B(f, \varepsilon)$

* si $f \neq 0 \quad \exists x \in I \quad f(x) = a \neq 0$.

Alors, pour n assez grand $\|f_n(x) - f(x)\| = \|0 - f(x)\| = |a|$ qui n'est pas aussi petit que l'on veut. Donc, nécessairement, si f est val. d'adhérence, $f = 0$.

* si $f=0$, on aura toujours $\|f_n - 0\| = 1$, donc :

$\exists\, B(f, \varepsilon = \frac{1}{2})$ (avec $f = 0$) $\quad \exists N>0$ ($N=1$ par ex) tel que $\forall n > N \Rightarrow f_n \notin B(f,\varepsilon)$

Ainsi $\bar{B}(0,1)$ n'est pas compacte.
En transformant un peu la définition de $(f_n)_n$, (par ex: $f_n(\frac{1}{2n+1}) = \varepsilon$)
on arrive à montrer que $\bar{B}(0,\varepsilon)$ n'est pas compacte, $\forall \varepsilon > 0$. Donc
tout voisinage de 0 n'est pas compact.

b) Etude en $a \in \mathcal{C}_c(I)$ quelconque (raisonnement valable pour E esp. normé quelconque)

Considérons l'application $\varphi : \mathcal{C}_c(I) \longrightarrow \mathcal{C}_c(I)$

$$f \overset{\varphi}{\longmapsto} \lambda f + a \quad \left| \begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{C} \\ a \in \mathcal{C}_c(I) \end{array} \right. \text{ fixés}$$

φ est continue, puisque :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \|f - f_0\| < \eta \Rightarrow \|\lambda f - \lambda f_0\| < \varepsilon$

$|\lambda|\ \|f - f_0\| < \varepsilon$ oui.

φ est bijective, et la bijection réciproque ~~est~~ $f \overset{\varphi^{-1}}{\longmapsto} \frac{1}{\lambda}(f-a)$ est
continue.
Donc φ = homéomorphisme de $\mathcal{C}_c(I)$ dans $\mathcal{C}_c(I)$.

Supposons, par l'absurde, que la
boule $\bar{B}(a,\lambda)$ soit compacte (fig)
dans $\mathcal{C}_c(I)$. Alors $\varphi^{-1}(\bar{B}(a,\lambda))$ sera
compacte aussi (cf. pro.)

Explicitons $\varphi^{-1}(\bar{B}(a,\lambda))$

$\forall f \in \bar{B}(a,\lambda) \quad \varphi^{-1}(f) = \frac{1}{\lambda}(f-a) \Rightarrow \|\varphi^{-1}(f)\| \leq \frac{1}{\lambda}\|f-a\| \leq 1$

donc $\varphi^{-1}(f) \in \bar{B}(0,1)$.

Inversement, $\forall f \in \bar{B}(0,1)$ $\quad \|f\|_\infty \leq 1$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\lambda} \| \lambda f + a - a \|_\infty \leq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\| \lambda f + a - a \|_\infty \leq \lambda$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(f) = \lambda f + a \in \bar{B}(a, \lambda)$$

donc $\quad \varphi^{-1}(\bar{B}(a,\varepsilon)) = \underbrace{\bar{B}(0,1)}$

non compact ! (voir a))

donc $\bar{B}(a,\varepsilon)$ n'est pas compact.

CQFD

(Remarque : Rappel du théorème de Riesz : "Tout espace normé localement compact est de dimension finie".)

⑧

(8) $\ell^p = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad x_n \in \mathbb{C}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \}$

$$\|(x_n)_n\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Equivalence de "K compact" et de

(1)
1) K est borné et fermé
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \; / \quad N \geq N_0 \quad \forall x = (x_n)_n \in K \quad \left(\sum_{n>N} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$

* K compact $\Rightarrow$ (1)

En effet K compact $\Rightarrow$ K fermé et borné

et K compact $\Rightarrow$ K précompact $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ ℓ^p peut être recouvert par 1 nbre fini (soit n) de boules de diam ε.

Alors $\forall x, y \in \ell^p$

$d(x,y) \leq n\,\varepsilon$

⑨ $(E,d) \xrightarrow{f} (E',d')$
compact

f localement lipschitzienne

$\Updownarrow$

(1) $\forall x \in E \quad \exists B(x, \varepsilon(x)) \quad \exists K_x > 0 \quad \Big| \begin{array}{l} d'(f(y), f(y')) \leq K_x d(y,y') \\ \forall y, y' \in B(x, \varepsilon(x)) \end{array}$

- Montrer que f est lipschitzienne.

2 stades pour la démonstration :

1- stade

Montrons que $\exists \delta > 0 \;\; \exists K > 0 \quad d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq K d(x,y)$

Considérons les boules $B(x, \frac{\varepsilon(x)}{2})$ qui recouvrent E compact. On peut extraire un sous-recouvrement de $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{\varepsilon(x_i)}{2}) = E$.

$\forall x \in E \quad \exists i \,/\, x \in B(x_i, \frac{\varepsilon(x_i)}{2})$

et (1) nous dit que :

$\forall y \in B(x_i, \frac{\varepsilon(x_i)}{2}) \quad \exists K_{x_i} > 0 \;/\; d'(f(y), f(x)) \leq K_{x_i} d(y,x)$

Prenons $K = \sup_{i \in [1,n]} K_{x_i}$.

Alors :

$\forall x \in E \quad \exists i \,/\, x \in B(x_i, \frac{\varepsilon(x_i)}{2})$

et $y \in B(x_i, \frac{\varepsilon(x_i)}{2}) \Rightarrow d'(f(y), f(x)) \leq K d(y,x)$

Prenons $\delta = \inf \frac{\varepsilon(x_i)}{2}$.

Alors, dès que $d(x,y) < \delta$, on aura
$\nearrow \exists i \quad x \in B(x_i, \frac{\varepsilon(x_i)}{2})$
$\searrow d(y, x_i) \leq \underbrace{d(y,x)}_{< \delta \leq \frac{\varepsilon(x_i)}{2}} + \underbrace{d(x, x_i)}_{\leq \frac{\varepsilon(x_i)}{2}} \leq \varepsilon(x_i)$

donc, dès que $d(x,y) < \delta$ (cf (1)) :
$\exists \delta \quad \exists K$

$$d(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d'(f(x), f(y)) \leq K\, d(x,y) \qquad (2)$$

2e stade

x, y quelconques ;

E compact $\Rightarrow$ E borné $\Rightarrow$ $\exists M > 0$ / $M \in \mathbb{N}$ tel que
$\forall x, y \in E \quad d(x,y) < M\delta$

lemme $\quad d(x,y) < 2\delta \quad \Rightarrow \quad d'(f(x), f(y)) \leq 2K\, d(x,y)$

En effet : $\quad d(x,y) < 2\delta$

~~$\exists$~~ $z \in E$ / $\begin{cases} d(x,z) < \delta \\ d(z,y) < \delta \\ d(x,y) = d(x,z) + d(z,y) \end{cases}$ l'espace métrique peut être troué. (= non compact)

faux

d'où $\begin{cases} d'(f(x), f(z)) \leq K\, d(x,z) \leq K d(x,y) \\ d'(f(z), f(y)) \leq K\, d(z,y) \leq K\, d(x,y) \end{cases}$

c.à.d $\quad d'(f(x), f(y)) \leq 2K\, d(x,y) \quad$ oui.

Cela étant

$\forall x, y \in E \quad \begin{cases} d(x,y) < M\delta \\ \exists M \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \underbrace{MK}_{K'} d(x,y)$

En ccl :

$$\boxed{\forall x, y \in E \quad d'(f(x), f(y)) \leq K'\, d(x,y)}$$

f est lipschitzienne.

CQFD

Correction :

2- stade : Pour x et y quelconques.

Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que f n'est pas lipschitzienne.

$$\forall n>0 \quad \exists\, x_n, y_n \in E \quad \text{tels que} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) > n\, d(x_n, y_n)$$

Rappelons (2) : $\exists \delta\ \exists K \quad d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq K\, d(x,y)$

Dès que $n \geq K$, on aura $d'(f(x_n), f(y_n)) > K\, d(x_n, y_n)$, et (2) nous montrera qu'alors $d(x_n, y_n) > \delta$. (3)

(x_n) (~~resp. (y_n)~~) est une suite de E compact, donc (E métrique) il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ convergente vers $x \in E$ (x = valeur d'adhérence).

De même pour (y_{n_k}) : $\exists\ (y_{n_{k_\ell}})$ (double indexation). La suite $(x_{n_{k_\ell}})_\ell$ converge donc toujours vers x.

Pour simplifier les notations, nous noterons

$$\begin{cases} (x_{n_k}) \text{ et } (y_{n_k}) \text{ ces sous-suites.} \\ \lim_{k\infty} x_{n_k} = x \quad \text{et} \quad \lim_{k\infty} y_{n_k} = y \end{cases}$$

En passant à la limite dans (3) (puisque $d(.,.)$ est une application continue de $E \times E \to \mathbb{R}$) : $d(x,y) > \delta$ (4)

D'autre part :

$$\Rightarrow d'(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) > n_k\, d(x_{n_k}, y_{n_k}) \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad (5)$$

où $n_k \to +\infty$, $d'(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \to d'(f(x), f(y))$ (car f est continue) et $d(x_{n_k}, y_{n_k}) \to d(x,y)$.

La contradiction viendra de ~~cette égalité~~ l'inégalité (5).

$$\begin{cases} \exists k_1 \quad k > k_1 \Rightarrow |d(x_{n_k}, y_{n_k}) - d(x,y)| < \frac{\delta}{2} \\ \exists k_2 \quad k > k_2 \Rightarrow |d'(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) - d'(f(x), f(y))| < 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour $k > \operatorname{Sup}(k_1, k_2)$

$$\begin{cases} d(x_{n_k}, y_{n_k}) > d(x,y) - \frac{\delta}{2} \\ d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) < d(f(x), f(y)) + 1 \\ d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq n_k \, d(x_{n_k}, y_{n_k}) \end{cases}$$

donc :

$$\underbrace{d(f(x), f(y))}_{\text{fini}} > -1 + \underbrace{n_k}_{\to +\infty} \left(d(x,y) - \frac{\delta}{2} \right) \qquad (6)$$

(6) aboutira à une contradiction si $d(x,y) - \frac{\delta}{2} > 0$, ce qui est le cas puisque $d(x,y) > \delta$ (cf (4))

(10)

On pose $\delta(K,K') = \operatorname{Sup}\left(\overbrace{\operatorname{Sup}_{x \in K}}^{\text{bien déf car } d(.,K) = \text{continue, déf. sur } K} d(x,K'), \operatorname{Sup}_{x' \in K'} d(K,x') \right) \geq 0$

Vérifions qu'il s'agit bien d'une distance :

a) $\delta(K,K') = 0 \iff \begin{cases} \operatorname{Sup}_{x \in K} d(x,K') = 0 \\ \operatorname{Sup}_{x' \in K'} d(K,x') = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} d(x,K') = 0 & \forall x \in K \\ d(K,x') = 0 & \forall x' \in K' \end{cases}$$

comme K et K' sont fermés

$$\iff \begin{cases} K \subset K' \\ K' \subset K \end{cases} \iff K = K' \quad \text{oui}$$

b) Trivial $\delta(K,K') = \delta(K',K)$

c) K, K', K'' compacts.

? $\delta(K,K') \leq \delta(K,K'') + \delta(K'',K')$

$$\delta(K,K') = \mathrm{Sup}\left(\mathrm{Sup}_{x\in K} d(x,K'),\ \mathrm{Sup}_{x'\in K'} d(K,x')\right)$$

K et K' jouent des rôles symétriques dans $\delta(K,K')$, et la démonstration suivante, qui montre que $\mathrm{Sup}_{x\in K} d(x,K') \leq \delta(K,K'') + \delta(K'',K')$ est aussi valable pour $\mathrm{Sup}_{x'\in K'} d(K,x')$

$$\forall x\in K \quad d(x,K') = \mathrm{Inf}_{x'\in K'} d(x,x')$$

$$\forall x\in K \quad \forall x'\in K' \quad d(x,x') \leq d(x,z) + d(z,x') \quad \text{ceci } \forall z\in K''$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x\in K \quad \forall x'\in K' \quad d(x,x') \leq \underbrace{\mathrm{Inf}_{z\in K''} d(x,z)}_{d(x,K'')} + \underbrace{\mathrm{Inf}_{z\in K''} d(z,x')}_{d(x',K'')}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x\in K \quad \forall x'\in K' \quad d(x,x') \leq \mathrm{Sup}_{x\in K} d(x,K'') + \mathrm{Sup}_{x'\in K'} d(x',K'')$$

$$\forall x\in K \quad \forall x'\in K' \quad d(x,x') \leq \delta(K,K'') + \delta(K',K'')$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x\in K \quad d(x,K') \leq \delta(K,K'') + \delta(K'',K')$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\mathrm{Sup}_{x\in K} d(x,K') \leq \delta(K,K'') + \delta(K'',K')}$$

On démontre, de même, que $\mathrm{Sup}_{x'\in K'} d(x',K) \leq \delta(K,K'') + \delta(K'',K')$

d'où le résultat final $\delta(K, K') \leq \delta(K, K'') + \delta(K'', K')$

(8)

$\ell^p = \{ (x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \}$ muni de la norme $\| \|_p$.

K compact dans ℓ^p $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 1) \text{ fermé borné} \\ 2) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \ / \ N \geq N_0 \ \ \forall x = (x_n)_n \in K \ \left(\sum_{n \geq N} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \end{cases}$

$(\Rightarrow)$ | a) fermé borné
| b) ?

(1) On sait que $\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in \ell^p \ \exists N_x \ \left(\sum_{n \geq N_x} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$ où N_x dépend de x et de ε

K compact $\Rightarrow$ K précompact

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ nbre fini de boules $B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ qui recouvrent K : $K = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$

Ainsi :

$\forall x \in K \ \exists i \in [1, n] \quad d(x_i, x) < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n - x_n^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors posons $N = \sup_i N_{x_i}$ (N_{x_i} associé à $\frac{\varepsilon}{2}$ et x_i eu égard à (1)).

Cela étant : $\left(\sum_{n \geq N} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n \geq N} |(x_n - x_n^i) + x_n^i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

~~$\forall x \in K$ compact~~ , ~~$\exists i \in [1, n]$~~

$\leq \underbrace{\left(\sum_{n \geq N} |x_n - x_n^i|^p \right)^{\frac{1}{p}}}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left(\sum_{n \geq N} |x_n^i|^p \right)^{\frac{1}{p}}}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$ (inégalité triangulaire)

utiliser good artifice pour le démontrer (poser $n' = n - N$)

car $N = \sup N_{x_i} \Rightarrow$ en particulier $N \geq N_{x_i}$ (pour le bon i)

Ainsi :

$\forall \varepsilon \ \exists N_0 \quad N > N_0 \quad \forall x \in K \Rightarrow \left(\sum_{n \geq N_0} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$ (b)

CQFD

($\Leftarrow$) Réciproquement

K est compact ?

$(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$: Extraire une sous-suite de Cauchy. (convergera dans ℓ^p $\Rightarrow$ conv. dans K fermé)

De plus : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \quad \left(\sum_{n\geq N_0} |x_n^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$

Alors $\left(\sum_{n\geq N_0} |x_n^k - x_n^{k'}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\varepsilon \qquad \forall k, k'$

Les suites gênantes sont :
$$\begin{cases} (x_0^k)_{k\in\mathbb{N}} \in K \quad \overset{?}{\nearrow} x_0 \ (+) \\ (x_1^k) \text{ ---} \\ \vdots \\ (x_{N_0-1}^k)_{k\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

(+) $\forall x \in K \quad \|x\| \leq M$ car K borné

Donc $|x_0^k|^p \leq \sum_{n\geq 0} |x_n^k|^p \leq M^p$

(M indépendant de k)

donc $(x_0^k)_k$ est une suite bornée de $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ elle admet au moins 1 val. d'adhérence.

On peut donc trouver une suite extraite "commune" à toutes les suites $(x_0^k)_{k\in\mathbb{N}}; \dots ; (x_{N_0-1}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et telle que
$$\begin{cases} x_0^{\varphi(k)} \longrightarrow x_0 \\ x_1^{\varphi(k)} \longrightarrow x_1 \\ \vdots \\ x_{N_0-1}^{\varphi(k)} \longrightarrow x_{N_0-1} \end{cases}$$

(Questions notation : on notera désormais k pour $\varphi(k)$)

Prenons la suite $x^{\varphi(k)} \in K \subset \ell^p$. Cette suite est de Cauchy ; en effet :

$$\underbrace{|x_0^{\varphi(k)} - x_0^{\varphi(k')}|^p + |x_1^{\varphi(k)} - x_1^{\varphi(k')}|^p + \dots + |x_{N_0-1}^{\varphi(k)} - x_{N_0-1}^{\varphi(k')}|}_{①} + \underbrace{\sum_{n\geq N_0} |x_n^{\varphi(k)} - x_n^{\varphi(k')}|^p}_{②}$$

Pour k et $k' \to +\infty$, tous le membre ci-dessus $\to 0$.

① $\leq \frac{\varepsilon}{2(N_0-1)}$ pour k, k' assez grand car $x_0^{\varphi(k)}$ converge, donc est bien une suite de Cauchy

② $\leq \frac{\varepsilon}{2}$

(NB : Utilisation des parties compactes de $\mathbb{R}^n$.)

C1 Topologie

Feuille n° 7.

I) X Soient E un espace métrique compact et $f : E \to E$ t.q :

$$\forall x, y \in E \quad x \neq y \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

Montrer que f admet un point fixe et un seul.

Par un contre-exemple, montrer que cette propriété n'est pas satisfaite en général si l'on ne suppose pas que E est compact.

II) X Soient E un espace topologique, (E', d') un espace métrique et $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de E dans E'.

1) Si la suite $(f_n)_n$ est équicontinue en $x_0 \in E$ et converge simplement vers f, alors f est continue en x_0.
2) Si E est compact et la suite $(f_n)_n$ est équicontinue en tout point de E et converge simplement vers f, alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

III) X Soient E un espace métrique compact, E' un espace métrique et $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(E, E')$.

Montrer que si $\mathcal{A}$ est précompacte alors

1) $\mathcal{A}$ est également continue.
2) $\mathcal{A}(E) = \{ f(x) \,;\, f \in \mathcal{A} \;\; x \in E \}$ est précompacte.

IV) X 1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Montrer l'équivalence entre :

i) f uniformément continue

ii) $\mathcal{A}_f = \{ f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ tq } f_a(x) = f(a+x) \;\; \forall x \in \mathbb{R} \}$ également continue.

2) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$

Montrer que $\mathcal{A}_f$ est également continue mais n'est pas relativement compacte dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(V) Soit $\mathcal{A}$ une famille également continue de fonctions d'un espace métrique E dans $\mathbb{R}$ et soit f l'enveloppe supérieure des éléments de $\mathcal{A}$ (ie $\forall x \in E \quad f(x) = \sup_{g \in \mathcal{A}} g(x)$).

1) Montrer que si E est convexe, f est partout finie ou partout égale à $+\infty$

2) Montrer que si f est partout finie, elle est uniformément continue.

3) Soient $E = [0,1]$ et $\mathcal{A} = \left\{ f_n : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ tq } f_n(x) = \frac{1}{(1+x)^n} ; n \in \mathbb{N} \right\}$
Que dire de $\mathcal{A}$?

Unicité : trivial

Existence :

$f : E \to E$

E compact

$x \neq y \quad d(f(x), f(y)) < d(x,y)$

Posons $\varphi : E \to \mathbb{R}$
$x \mapsto d(x, f(x))$

φ est continue : puisque

$d(x, f(x)) \leq d(x,y) + d(y, f(y)) + d(f(y), f(x))$

donc

$d(x, f(x)) - d(y, f(y)) \leq d(x,y) + d(x,y)$

d'où le résultat

E = compact $\Rightarrow \varphi f(E) \subset \mathbb{R}$ compact
$\Rightarrow \varphi f(E)$ fermé borné. f atteind ses borne.

Supposons, par l'absurde que $\begin{cases} \inf_{x \in E} \varphi(x) = a > 0 \\ \exists x_0 \text{ tel que } \varphi(x_0) = a \end{cases}$

D'autre part $\forall x \in E \quad d(f(x), f^2(x)) < d(x, f(x))$

$\Downarrow$

$\begin{cases} \varphi(x_1) < \varphi(x) \\ x_1 = f(x) \end{cases}$

Prenons $x = x_0$, et l'on a supposé que $f(x) \neq x_0$. Alors $\underbrace{\varphi(x_1) < \overbrace{\varphi(x_0)}^{a}}$

absurde car $a = \inf \varphi($

CQFD

Contre-exemple : le chercher tout seul !

Assez simple : Prenons $E = \mathbb{R}_+^*$ (non compact).

$d(x,y) = |x-y|$ (distance induite)

$f(x) = \frac{x}{2}$ (qui est bien une application de $E \to E$)

Alors on a bien : $d(f(x), f(y)) < d(x,y) \quad \forall x,y \in E$

et pourtant $f(x) = x \iff \frac{x}{2} = x \iff x = 0$ dans $\mathbb{R}$

$\iff x \in \emptyset$ dans E

Il n'existe pas de point fixe dans E.

Parenthèse : $E = \mathbb{R}^n$ $\quad \|x\| = \sqrt{(x|x)}$

$e^n = \{x \in E \,/\, \|x\| \leq 1\}$ $\quad S^{n-1} \{x \in E \,/\, \|x\| = 1\}$

Théorème

Soit $f : e^n \to e^n$ continue

Alors f admet un point fixe

Pour simplifier les problèmes, à X espace topologique, on associe un ensemble "algébrique" (groupe, anneau ..etc...) $\pi(X)$

$X \rightsquigarrow \pi(X)$ avec harmonie

$f \downarrow \qquad \downarrow \pi(f)$ homomorphisme de groupe

$g \circ f$ $\quad Y \rightsquigarrow \pi(Y)$

$g \downarrow \qquad \downarrow \pi(g)$ $\quad \pi(g \circ f)$?

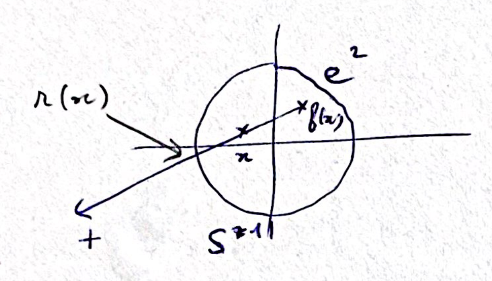
$Z \rightsquigarrow \pi(Z)$

$$\begin{cases} \pi(g \circ f) = \pi(g) \circ \pi(f) \\ \pi(Id_X) = Id_{\pi(X)} \end{cases}$$

On montrera : $\begin{cases} \pi(e^n) = \{0\} \\ \pi(S^n) = (\mathbb{Z}, +) \end{cases}$ (admis)

Par l'absurde : si f n'admet pas de points fixe : $x \neq f(x) \quad \forall x \in e^n$

la droite $(x, f(x))$ est bien définie.



$r : e^n \to S^{n-1}$
$x \mapsto r(x)$ } démontrer que c'est continue

et

$r|_{S^{n-1}} = Id_{S^{n-1}}$

On a le diagramme :

$$S^{n-1} \overset{i}{\hookrightarrow} e^n \overset{r}{\longrightarrow} S^{n-1}$$

$$x \longmapsto x \longmapsto x$$

donc $r \circ i = Id_{S^{n-1}}$

$$S^{n-1} \overset{i}{\hookrightarrow} e^n \overset{r}{\longrightarrow} S^{n-1}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\pi(S^{n-1}) \overset{\pi(i)}{\hookrightarrow} \pi(e^n) \overset{\pi(r)}{\longrightarrow} \pi(S^{n-1})$$

$$\underbrace{\pi(r \circ i)}_{Id_{S^{n-1}}} = \pi(r) \circ \pi(i)$$

$Id_{S^{n-1}} = Id$

donc $\pi(r) \circ \pi(i) = Id \Rightarrow \pi(i)$ injective.

$\Downarrow$

$\mathbb{Z} \hookrightarrow 0$

② $f_n : E \longrightarrow (E', d')$ continue $(\forall n)$

1°) $(f_n)_n$ est équicontinue en $x_0 \in E$ et converge simplement vers f, alors f est ~~équi~~ continue en x_0.

$\mathcal{A} = \{ f_n \,/\, n \in \mathbb{N} \}$ équicontinue en x_0.

Cela signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V(x_0) \qquad x \in V(x_0) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} d(f_n(x), f_n(x_0)) < \varepsilon \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right. \qquad (1)$$

On suppose que $\lim f_n = f$, c.à.d que :

$$\left| \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \\ \forall x \in E \end{array} \right. \quad \exists N > 0 \quad n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (2)$$

$$\uparrow$$
$$N(\varepsilon, x)$$

On veut montrer que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V(x_0)$ ~~/~~ $x \in V(x_0) \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

On a $d(f(x), f(x_0)) \leq \underbrace{d(f(x), f_n(x))}_{\substack{< \varepsilon_1 \\ \text{dès que } n > N_1(x)}} + d(f_n(x), f_n(x_0)) + \underbrace{d(f_n(x_0), f(x_0))}_{\substack{< \varepsilon_2 \\ \text{dès que } n > N_2(x)}}$

(3)

donc on choisi $N = \sup(N_1(x), N_2(x))$. Pour $n > N$, on aura donc :

$$d(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \underbrace{d(f_n(x), f_n(x_0))}_{< \varepsilon \text{ dès que } x \in V(x_0)}$$

En conclusion, dès que $x \in V(x_0)$ il existe N tel que l'on puisse choisir $n > N$ quelconque, permettant de faire le découpage (3) et d'obtenir $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ pour tout ε (donné à l'avance) ~~dès que x~~.

2°/ E compact et f_n équicontinue en tout point de E. On suppose que $\lim f_n = f$ simplement. Montrer qu'alors $f_n \to f$ uniformément.

Solution :

On veut montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad n > N \Rightarrow \underbrace{\sup_{x \in E} d'(f_n(x), f(x))}_{\text{existe car } E \text{ compact} \Rightarrow E \text{ borné}} < \varepsilon \qquad (1)$$

Comme $\lim f_n = f$:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(y)$ tel que $n > N(y) \Rightarrow d'(f_n(y), f(y)) < \varepsilon$

Comme E est compact : $E = \bigcup_{i=1}^{n} V(y_i)$ où $V(y_i)$ est le voisinage qui intervient dans l'équicontinuité de $\mathcal{A} = \{f_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{f\}$ (↑ possible (cf. 1°/))

Ainsi, en notant $N = \sup(N(y_1), \dots, N(y_n))$:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ tel que $n > N \Rightarrow d'(f_n(y_i), f(y_i)) < \varepsilon$

Cela étant, nous voudrions démontrer l'assertion :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad n > N \Rightarrow \left| \begin{array}{l} d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \\ \forall x \in E \end{array} \right. \qquad (*)$$

On a :

$\forall x \in E \quad \exists i \ / \ x \in V(y_i)$

et : $d'(f_n(x), f(x)) \leq \underbrace{d'(f_n(x), f_n(y_i))}_{< \varepsilon} + \overbrace{d'(f_n(y_i), f(y_i))}^{< \varepsilon \text{ dès que } n > N} + \underbrace{d'(f(y_i), f(x))}_{< \varepsilon}$

($< \varepsilon$ car $x \in V(y_i)$ et $\{f_n, f\}$ équicontinue) ($< \varepsilon$ ← m̂ raisons)

On a bien démontré (1).

CQFD

④ 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Équivalence entre :

i) f uniformément continue

ii) $\mathcal{A}_f = \{ f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ / \ f_a(x) = f(a+x) \ \forall x \in \mathbb{R} \}$ également continue

$\mathcal{A}_f$ ~~est~~ également continue $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad |x-y| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f_a(x) - f_a(y)| < \varepsilon \\ \forall a \in \mathbb{R} \end{cases}$

i) $\Rightarrow$ ii) $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall x', y' \quad |x'-y'| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(y')| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(a+x) - f(a+y)| < \varepsilon$

$|x-y| < \delta \Rightarrow |f_a(x) - f_a(y)| < \varepsilon$ oui

ii) $\Rightarrow$ i)

$\mathcal{A}_f$ également continue $\Rightarrow \forall a$, f_a est uniformément continue.

$\Rightarrow a = 0$ f est uniformément continue.

2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

$\mathcal{A}_f$ également continue $\Leftrightarrow$ f uniformément continue

$$\left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right| = \left| \frac{(y-x)(y+x)}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| = \underbrace{\left| \frac{y+x}{(1+x^2)(1+y^2)} \right|} |y-x|$$

$$\frac{|y+x|}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqslant \frac{|y|}{1+y^2} + \underbrace{\frac{|x|}{1+x^2}}_{\leqslant \frac{1}{2}} \leqslant 1 \qquad \frac{x}{1+x^2}$$

$1+x^2 - x\,(2x)$

$1 - x^2$ s'annule pour $x = \pm 1$

$\mathcal{A}_f$ non rel. compact dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

E espace métrique
∪
A   A relativement compact
$\Downarrow$
toute suite de A admet une valeur d'adhérence dans $\bar{A}$

Donc A non rel. compact, $\Leftarrow$ $\exists$ suite de A qui n'admet pas de valeur d'adhérence. ($\Leftrightarrow$ aucune sous suite ne converge)

Ici : $\mathcal{A}_f = \{ f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ / \ f_a(x) = \frac{1}{1+(a+x)^2} \quad a \in \mathbb{R} \}$

- Prenons $a = n$ $\quad f_n(x) = \frac{1}{1+(n+x)^2}$ $\quad (f_n)_n \in$ = suite de $\mathcal{A}_f$.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge

pour $\| \|_\infty$: $\quad f_{n_k} \xrightarrow[\text{cv. pour } \| \|_\infty \text{ (= conv. uniformément)}]{} g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ où $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$x \in \mathbb{R}$ fixé $\quad f_{n_k}(x) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \quad$ simplement

- Donc, si g existe, $g = 0$. ~~Montrons que~~ a $\quad \sup |f_{n_k}(x) - 0| = \sup |f(x)| = 1$

Donc $\forall k \ \sup |f_{n_k}| = 1 \Rightarrow$ contradiction

③

Rappel du th. d'Ascoli :

(Asc) $\mathcal{A}$ précompacte $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{a) } * \ \mathcal{A} \text{ équicontinue en tout pt} \\ \text{b) } * \ \mathcal{A}(x) = \{f(x) \ / \ f \in \mathcal{A}\} \text{ est précompacte} \quad \forall x \in E \end{cases}$

E métrique compact
E' métrique
$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(E, E')$

$\Rightarrow$ Montrer que $\mathcal{A}$ précompact (I) $\Rightarrow$

1) $\mathcal{A}$ également continue

2) $\mathcal{A}(E) = \{f(x), f \in \mathcal{A}, x \in E\}$ est précompacte.

(I) $\Rightarrow$ 1) Car E compact

2) $\mathcal{A} \times E \xrightarrow{\varphi} E'$

$(f, x) \longmapsto f(x)$ (uniformément continue ...) et $\varphi(\mathcal{A} \times E) = \mathcal{A}(E)$ ($\mathcal{A} \times E$ précompacte)

φ est unif. cont. En effet :

(3) $d'(\varphi(f,x), \varphi(f',x')) = d'(f(x), f'(x')) \leq \underbrace{d'(f(x), f(x'))}_{< \frac{\varepsilon}{2} \ ①} + \underbrace{d'(f(x'), f'(x'))}_{< \frac{\varepsilon}{2} \ ②}$

① $\mathcal{A}$ ~~dès que x~~ eg. continue $\Rightarrow \forall \varepsilon \ \exists \delta \quad d(x,x') < \delta \Rightarrow \begin{cases} d'(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall f \in \mathcal{A} \end{cases}$

② $d'(f(x'), f'(x')) \leq \sup_{t \in E} d'(f(t), f'(t)) = D(f, f')$

on prendra $D(f, f') < \frac{\varepsilon}{2}$

Et alors (3) :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 = \operatorname{Inf}\left(\frac{\varepsilon}{2}, \delta\right) \quad \underbrace{\operatorname{Sup}\left(D(f,f'), d(x,x')\right)}_{\text{distance sur le produit } \mathcal{A} \times E} < \operatorname{Inf}\left(\frac{\varepsilon}{2}, \delta\right)$

$\Downarrow$

$d'(\varphi(f,x), \varphi(f',x')) < \varepsilon$

(5)

1)

Supposons qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) < \infty$. Posons :

$$A = \{x \in E \,/\, f(x) = \infty\}$$

Alors : * <u>A est un ouvert de E</u>

Soit $x_0 \in A$ $\quad f(x_0) = \infty$ c.à.d $\forall A > 0 \ \exists g \in \mathcal{A} \quad g(x_0) > A$

Alors :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$

$g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon$

Ainsi : $\exists \delta \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x) > A - 1$

donc $\forall A > 0 \quad \exists g \quad A - 1 < g(x) \Rightarrow f(x) = \infty$ (dès que $d(x, x_0)$)

Cela signifie que $B(x_0, \delta) \subset A \Rightarrow A$ ouvert.

* <u>A est fermé de E</u>

$\complement A = \{x \in E \,/\, f(x) \neq \infty\}$ = ouvert (m̂ genre de dem que ci-dessus)

* <u>$A \neq E$</u> car on a supposé l'existence de $x_0 \in E \,/\, f(x_0) < \infty$

Donc $A = \emptyset$ (si E connexe)

Ccl :

E connexe $\Rightarrow$ | f partout finie
ou
f égale à ∞ partout

2) Soit f partout finie

$\mathcal{A}$ également cont :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \quad d(x,y) < \eta \implies \begin{cases} |g(x) - g(y)| < \varepsilon \\ \forall g \in \mathcal{A} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} g(y) - \varepsilon < g(x) < g(y) + \varepsilon \\ \forall g \in \mathcal{A} \end{cases}$$

$$\implies \operatorname{Sup} g(y) - \varepsilon \leq \operatorname{Sup} g(x) \leq \operatorname{Sup} g(y) + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \quad d(x,y) < \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

ce qui montre bien l'uniforme continuité de f.

3) $E = [0,1]$

$\mathcal{A} = \left\{ f_n : [0,1] \to \mathbb{C} \ / \ f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x)^n} \quad n \in \mathbb{N} \right\}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) \leq f_0(x)$

L'enveloppe des fonctions f_n est donc la fonction $f_0 = f$. Elle est finie et unif. continue sur E. ~~On peut donc reprendre à rebours~~ (faux) le ~~raisonnement du 2) et arriver à~~ :

~~$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \quad d(x,y) < \eta \implies \begin{cases} |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$~~

~~$\mathcal{A}$ = ensemble également continu~~

Remarque :

ⓐ ~~enveloppe de $\mathcal{A}$~~ → partout finie et ~~uniformément continue~~ $\implies$ $\mathcal{A}$ ~~également continue~~

ⓑ ~~$\mathcal{A}$ également continue $\implies$ enveloppe de $\mathcal{A}$~~ ~~ou~~ bien partout ∞ ~~ou bien partout finie – faux~~

L'enveloppe supérieure ne nous a rien donné. Considérons l'enveloppe inférieure de $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}' = -\mathcal{A} = \{-g \ / \ g \in \mathcal{A}\}$$ (également continue si $\mathcal{A}$ est également continue)

Or enveloppe sup de $\mathcal{A}^*$ = - Enveloppe inf $\mathcal{A}'$

(En effet : $f(x) = \operatorname{Sup} g(x)$ $\qquad h(x) = \operatorname{Inf}(-g(x))$

et $-f(x) = -\operatorname{Sup} g(x) = \operatorname{Inf}(-g(x)) = h(x)$ oui)

Posons h = envel. ~~sur~~ inférieure de $\mathcal{A}$. Les résultats obtenus aux 1) et 2) sont applicables

E est connexe ici.

Supposons par l'absurde que $\mathcal{A}$ est également continue, alors $\mathcal{A}'$ le serait aussi, donc (cf. question 2)) : $h(x)$(= envel. inf. de $\mathcal{A}$) serait uniformément continue.

Mais nous avons : $\begin{cases} h(x) = 0 & \text{pour } x \in]0,1] \\ h(0) = 1 \end{cases}$ $\neq$ fct continue

Donc $\mathcal{A}$ <u>n'est pas</u> également continue.

Exercice supplémentaire :

Soit E espace topologique. Par définition on dit que E possède "la propriété du pt fixe" si tte fction continue de E dans E admet un point fixe

1) $E = [a,b]$ possède la propriété du point fixe

(Considérer $g : E \to \mathbb{R}$ $\qquad$ pour f continue $E \to E$)
$\qquad x \mapsto f(x) - x$

2) Si E possède la propriété du pt fixe, alors E est connexe.

3) Et maintenant le joyau de la couronne :

Soit $E \subset \mathbb{R}$ possède la propriété du point fixe $\Rightarrow E = [a, b]$ $a, b \in \mathbb{R}$

(Et c'est ainsi que les petites souris font les gros rats)

1)

$g : E \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f : E \to E$

$x \mapsto f(x) - x$ $\qquad$ $x \mapsto f(x)$

| g est continue
| E connexe $\qquad \Rightarrow \qquad g(E)$ connexe dans $\mathbb{R}$

(Th. de Bolzano) $\to$ $\begin{cases} g(a) = f(a) - a \geq 0 \\ g(b) = f(b) - b \leq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \exists c \in [a, b] \,/\, g(c) = 0$

$\Rightarrow \exists c \in [a, b] \,/\, f(c) = c$

2)

Si E n'était pas connexe, $\exists$ A, B ouverts de E non vides disjoints / $E = A \cup B$

$$E = A \cup B$$
$$\downarrow f$$
$$E = A \cup B$$

Soit $a \in A$ $\qquad$ $\begin{cases} x \in B & f(x) = a \\ x \in A & f(x) = b \end{cases}$

$b \in B$

f est continue (car A et B ouverts) $\Rightarrow$ f n'a pas de point fixe.

3)

E est connexe $\Rightarrow$ $E = (a, b)$

* on ne peut pas avoir $(a, \infty[$

car $\exists f$: translation $f(x) = x + 1$ | continue, $E \to E$, pas de pts fixes

* on ne peut pas avoir $(a, b[$ $(b < \infty)$

b

a

a b

f n'admet pas de pts fixes

Donc E connexe et, de plus $E = [a, b]$

IMSP
77-78

C1 Topologie.

Feuille n° 8

× I - Soient E un espace topologique et $A \subsetneq E$ une partie non vide, ouverte et fermée. Montrer que si F est une partie connexe de E alors on a : $F \subset A$ ou $F \subset \complement A$.

× II - Soit E un espace métrique connexe dans lequel la distance n'est pas bornée. Montrer que toute sphère dans E est non vide.

× III - Soient E et F deux espaces connexes, $A \subsetneq E$ et $B \subsetneq F$. Montrer que $\complement(A \times B)$ est connexe.

× IV - Soit E un espace métrique. Montrer que si E est connexe on a la propriété suivante :

(P) : $\forall \varepsilon > 0$, $\forall a, b \in E$, $\exists x_0, x_1, \ldots, x_n \in E$ tel que :

$x_0 = a$, $x_n = b$ et $d(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon$ pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Montrer que si E est compact possédant la propriété (P) alors E est connexe.

HS V - Soit dans $\mathbb{R}^2$ l'espace $E = \complement\mathbb{Q} \times [0,1] \cup \mathbb{Q} \times [-1,0[$

Montrer que E est connexe mais non localement connexe.
Prouver que E n'est pas connexe par arcs.

× VI - Soit $E = [-8, 8] \times [0, 1]$. On considère sur E la relation d'équivalence qui identifie les point de la forme $(-8, y)$ et $(8, 1-y)$ pour $y \in [0,1]$ et laisse invariants les autres point.

On notera par $\pi : E \longrightarrow E/\sim$ la surjection canonique continue pour la topologie quotient sur $E/\sim$.

Montrer que $E/\sim$ est connexe.

Montrer que $E/\sim \setminus \pi\left([-8,8] \times \{1/2\}\right)$ est connexe.

Quel est le nombre des composants connexes de :

$$E/\sim \setminus \pi\left([-8,8] \times \left\{1/4, 1/2, 3/4\right\}\right).$$

X **VII** Soit E un espace vectoriel normé et Ω un ouvert (non vide) connexe de E. Montrer que pour tout couple (a,b) de Ω il existe $a_0, a_1, \dots, a_n$, n points de Ω tel que les segments $[a_i, a_{i+1}] \subset \Omega$ pour $i = 0, \dots, n-1$ et $a_0 = a$, $b = a_n$; $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} = L$ est appelé ligne brisée joignant $a_0 = a$ et $a_n = b$. On pose

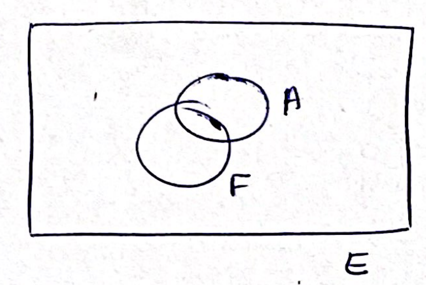
$$\delta(L) = \sum_{i=0}^{n-1} \|a_i - a_{i+1}\|.$$

Montrer que la quantité $d_g(a,b) = \inf\left\{\delta(L) \,/\, L \text{ parcourt les lignes brisés joignant } a \text{ et } b \text{ dans } \Omega\right\}$ définit une distance sur Ω, appelée distance géodésique de a et b dans Ω et vérifie que :

$$\|a-b\| \leq d_g(a,b).$$

Si Ω est convexe alors $\|a-b\| = d_g(a,b)$ - réciproque?

①



$F \cap A$ ouvert et fermé de F, or F connexe $\Rightarrow$ $F \cap A = F$ ou $\emptyset$

$\to F \subset A$

$\to F \subset \complement A$

Application de cet exercice au suivant : E e.t. (A_n) connexes. On suppose $\forall n \quad A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ connexe ?

Soit B ouvert et fermé de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, A_n connexe $\Rightarrow \begin{cases} A_n \subset B \\ \text{ou} \\ A_n \subset \complement B \end{cases}$

Supposons que $A_1 \subset B$

$A_1 \subset B$; $A_2 \subset B$ ... $A_n \subset B \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset B \Rightarrow B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

Supposons que $A_1 \subset \complement B$

$A_1 \subset \complement B$; ... $A_n \subset \complement B \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \complement B \Rightarrow B = \emptyset$ (car $B \subset \bigcup A_n$)

Donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ connexe.

② E. et

$S = \{x \,/\, d(x,a) = r\}$

Si $S = \emptyset$, alors $E = \underbrace{\{x \in E \,/\, d(x,a) < r\}}_{\text{ouvert non vide } (a \in \ )} \underset{\text{disj}}{\cup} \underbrace{\{x \in E \,/\, d(x,a) > r\}}_{\text{ouvert non vide (car d non bornée sur E)}}$

2- méthode

$x_0 \in E$ $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto d(x, x_0)$

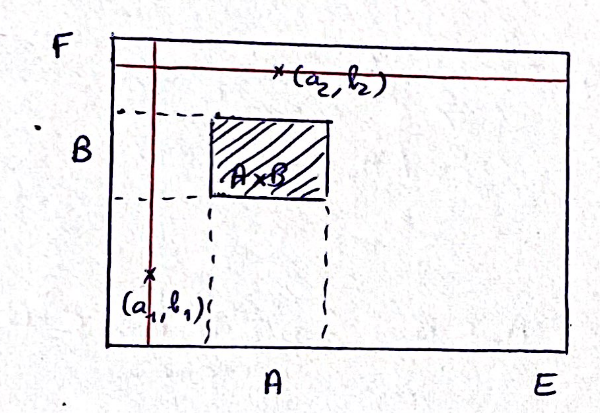
φ continue $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\,\varphi$ = connexe $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\,\varphi = [0, \alpha)$

d non bornée $\Rightarrow$ $\alpha = \infty$

donc $\mathrm{Im}\,\varphi = [0, \infty[$

donc $\forall a \in [0, \infty[$ $S(x_0, \underset{\text{rayon}}{a}) \neq \emptyset$

③ E et F connexes $A \underset{\neq}{\subset} E$ $B \underset{\neq}{\subset} F$



dessin (cas a))

Soit (a_1, b_1) et $(a_2, b_2) \in \complement A \times B$

$(a_1, b_1) \in \complement A \times B \Leftrightarrow a_1 \notin A$ ou $b_1 \notin B$

$\rightarrow$ $a_1 \notin A$ (l'autre cas se traiterait de façon analogue)

Alors, de 2 choses l'une :

a) ~~$a_1 \notin A$~~ $\boxed{b_2 \notin B}$

$(\{a_1\} \times F) \cup (E \times \{b_2\})$ connexe (car intersection non vide, et chacun d'eux est homéomorphe à F (resp E)) dans $\complement A \times B$

On a donc trouvé un connexe dans $\complement A \times B$ et contenant à la fois (a_1, b_1) et (a_2, b_2)

b) $\boxed{a_2 \notin A}$ On prend alors

$$(\{a_1\} \times F) \cup (E \times \{c\}) \cup (\{a_2\} \times F)$$

où $c \in \complement_F B$

C'est une réunion finie de connexes 2 à 2 non disjoints $\Rightarrow$ c'est un connexe.

Il est dans $\complement A \times B$. Il contient (a_1, b_1) et (a_2, b_2)

Dans tous les cas, pour (a_1, b_1) fixé, et (a_2, b_2) quelconque dans $\complement A \times B$, il a été possible de trouver un connexe (dans $\complement A \times B$) contenant (a_1, b_1) <u>et</u> (a_2, b_2). La composante connexe de (a_1, b_1) contiendra donc nécessairement (a_2, b_2), ceci $\forall (a_2, b_2) \in \complement A \times B$. La composante connexe sera donc $\complement A \times B$.

Donc $\complement A \times B$ est connexe.

NB:
Dans un espace produit, ce genre de méthode est souvent utilisé.



Remarque générale

Soit E connexe et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E ($\dot{x} \in E/\mathcal{R}$)

Si $\forall x \in E$ $\dot{x}$ ouvert, alors $E/\mathcal{R} = 1$ point.

Preuve : $x \xrightarrow{\pi} \pi(x) = \dot{x}$ est continue

E connexe $\Rightarrow \pi(E) = E/\mathcal{R}$ connexe

$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = \text{ouvert} \\ \dot{x} = \text{fermé} \ (\dot{x} = \complement \underbrace{\bigcup_{i \in I} \dot{y}_i}_{\text{ouvert}}) \end{array} \right. \Rightarrow \{\dot{x}\} = E/\mathcal{R}$

ε fixé $\quad a \, \mathcal{R}_\varepsilon \, b \iff \exists x_0 = a, \dots, x_n = b \ / \ d(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon$

$\dot{a} = \{ b \in E \ / \ \exists x_0 \dots x_n \ / \ d(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon \}$

$\dot{a}$ est ouvert (évident)



Si E est connexe : (cf. remarque précédente)

$E/_{\mathcal{R}_\varepsilon} = 1$ point $\Rightarrow \dot{a} = E$

b)

E non connexe ; $\exists A, B$ fermés non vides disjoints $/ E = A \cup B$

$d(A, B) \neq 0$ (car $A \cap B = \emptyset$ et A, B compacts dans E compact)

Soit $\alpha = d(A, B) > 0$

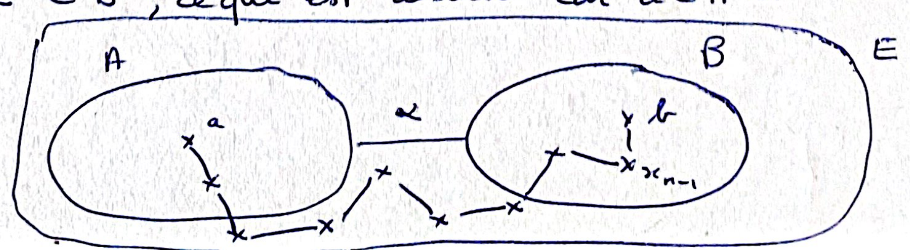
Soit $(a, b) \in A \times B$ $\quad \exists x_0, \dots, x_n \ / \ d(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ (avec $x_0 = a$, $x_n = b$)

$j = 0, \dots, n-1$ $\quad$ Soit x_j, x_{j+1}

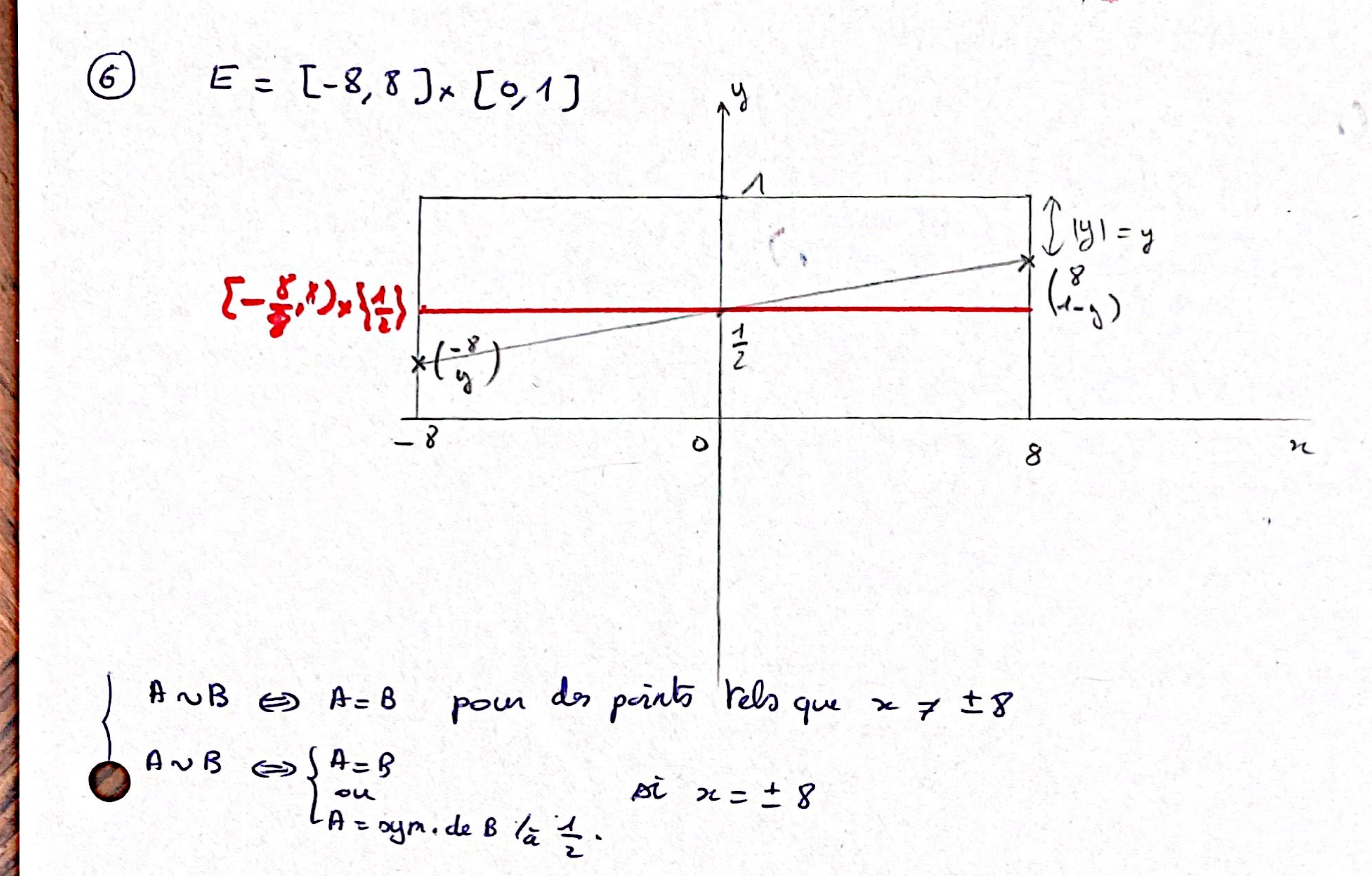
$x_{j+1} \in B \Rightarrow x_j \in B$

car $\left. \begin{array}{l} d(x_j, x_{j+1}) \leq \varepsilon = \frac{\alpha}{2} = \frac{d(A,B)}{2} \\ \text{si } x_j \in A \text{ alors } d(x_j, x_{j+1}) \geq d(A,B) \end{array} \right\} \Rightarrow x_j \in B$

Comme $x_n = b \in B$, on déduit que $x_i \in B \ \forall i \in [0, n]$, donc que $x_0 = a \in B$, ce qui est absurde car $a \in A$ et $A \cap B = \emptyset$.



⑥ $E = [-8, 8] \times [0, 1]$



$A \sim B \iff A = B$ pour des points tels que $x \neq \pm 8$

$A \sim B \iff \begin{cases} A = B \\ \text{ou} \\ A = \text{sym. de } B \text{ /à } \frac{1}{2}. \end{cases}$ si $x = \pm 8$

On note $\pi : E \longrightarrow E/_\sim$ la surjection canonique.

1°/ $E/_\sim$ est connexe

$\pi(E) = E/_\sim$, comme π est continue, il suffit de montrer que E connexe :

E connexe car $\left.\begin{array}{l} [-8, 8] \text{ connexe} \\ [0, 1] \text{ connexe} \end{array}\right\} \Rightarrow [-8, 8] \times [0, 1]$ connexe

oui.

2°/ $E/_\sim \setminus \pi([-8, 8] \times \{\frac{1}{2}\})$

enlevé

B_2

B_1

connexe (vue sur $\pi(E) = E/\sim$)

~~$\pi(B_1 \cup B_2)$~~ $= E/_\sim \setminus \pi([-8, 8] \times \{\frac{1}{2}\})$

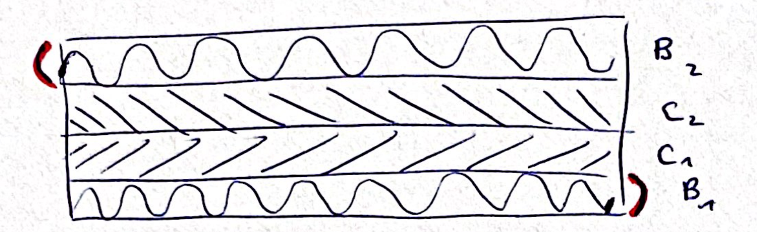
$\pi(B_1) \cup \pi(B_2)$

connexe connexe

et intersection non vide car $\dot{\overline{(-8, 1)}} \in$ ~~B~~ $\pi(B_2)$

$\overline{(8, 0)} \in \pi(B_1)$

3°/



$\underbrace{\pi(B_1) \cup \pi(B_2)}$ $\cup$ $\underbrace{\pi(C_1) \cup \pi(C_2)}$

intersection non vide ⇓ connexe — intersection non vide ⇓ connexe

Mais $(\underbrace{\pi(B_1) \cup \pi(B_2)}_{\text{connexe}}) \cap (\underbrace{\pi(C_1) \cup \pi(C_2)}_{\text{connexe}}) = \emptyset$.

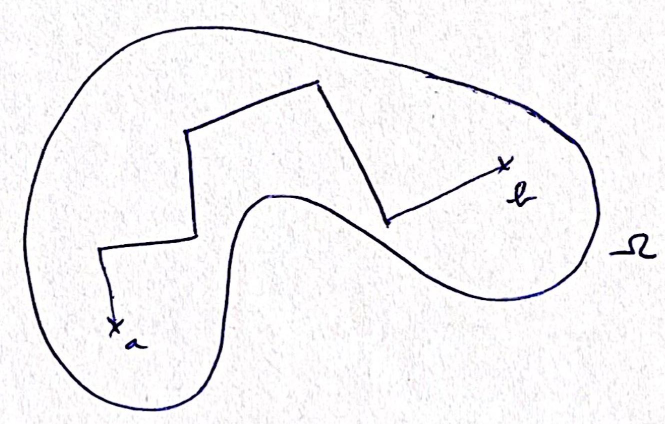
(Donc $E = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ et A et B connexes $\Rightarrow$ E possède 2 composantes connexes)

VII

But de l'exercice :

Ω ouvert non vide et connexe de E e.v.n $\Rightarrow$ (?) Ω connexe par arcs (différentiables par morceaux.)

(Rappel de cours : Si B connexe par arcs (= par chemins), alors B est connexe)



1°/ E connexe $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\exists\ a_0, \dots, a_n$ définissant un chemin brisé liant a et b. (dans Ω)

$F = \{ x \in \Omega \ /\ x$ peut être joint à a (fixé) par une ligne brisée $\}$

Rq : dans un e.v.n, toute boule est convexe :

c.à.d $\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \in B(x_0, \alpha) \Rightarrow tx + (1-t)y \in B \quad \forall t \in [0,1]$

* $F \neq \emptyset$
* F ouvert $\xrightarrow[\text{(cf. Cartan)}]{\text{(rappel)}}$ a ⟶ $B(x, \alpha) \subset \Omega$ (ouvert)
* F fermé (m̂ démonstration)

↑ la boule entière est contenue dans F

donc $F = \Omega$

2) $\delta(L) = \sum_{i=0}^{n-1} \| a_i - a_{i+1} \|$ est une <u>distance</u>.

l'Inf $\delta(L)$ existe car $\forall L \quad \delta(L) \geq 0$. On définit bien une distance :

$$~~d_g~~ \; d_g(a,b) = \operatorname{Inf} \{ \delta(L) / L \subset \Omega \}$$

en effet :

* $d_g(a,b) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists L \quad 0 \leq \delta(L) < \varepsilon$

On $\|a-b\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|a_i - a_{i+1}\| = \delta(L) < \varepsilon$ (donc $\|a-b\| \leq \delta(L) \; \forall L$ ⇓ $\|a-b\| \leq d_g(a,b)$)

donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \|a-b\| < \varepsilon \Rightarrow a = b$

* $d_g(a,b) = d_g(b,a)$ trivial

* $d_g(a,c) \overset{?}{\leq} d_g(a,b) + d_g(b,c)$

Soit $a_1, \dots, a_n = b$ et $b_1 = b, \dots, b_n = c$ deux chemins quelconques L_1 et L_2 liant respectivement a à b, et b à c.

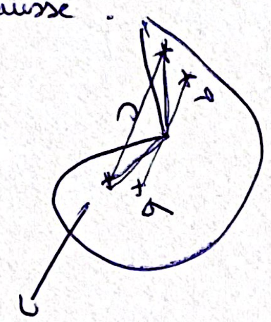
$a_1, \dots, a_n = b_1, \dots, b_n = c$ = chemin liant a à c, soit $L_1 \cup L_2$

Alors ~~$\delta(L_1) = b$~~
$\delta(L_1 \cup L_2) = \delta(L_1) + \delta(L_2)$
⇓
$d_g(a,b) = \underset{L \text{ liant } a \text{ à } b}{\operatorname{Inf}} \delta(L) \leq \delta(L_1) + \delta(L_2) \quad \forall L_1$ et L_2
$\leq \operatorname{Inf} \delta(L_1) + \operatorname{Inf} \delta(L_2)$

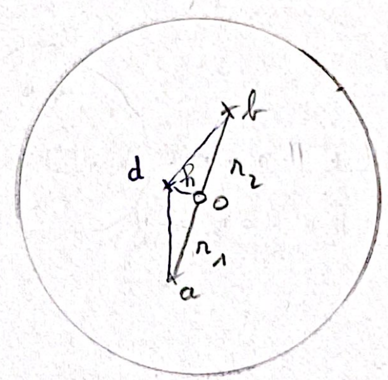
3°/

Si Ω convexe, alors $\|a-b\| = d_g(a,b)$ $\forall a,b$).

La réciproque est fausse.



pas un contre exemple.



convexe \ {1 point} ← le centre

on a $d_g(a,b) = \|a-b\|$

car $d_g(a,b) \leq \underbrace{d_g(a,d)}_{\sqrt{r_1^2-h^2}} + \underbrace{d_g(d,b)}_{\sqrt{r_2^2-h^2}}$

où $h = od$

et $h \to 0$ $\quad d_g(a,b) \leq \underbrace{r_1+r_2}_{= \|a-b\|}$

$\Downarrow$

$d_g(a,b) = \|a-b\|$

Exercices sur les connexes

① Soit $I = [0,1]$, soit $S^1 = \{ z \in \mathbb{R}^2 \,/\, |z| = 1 \}$

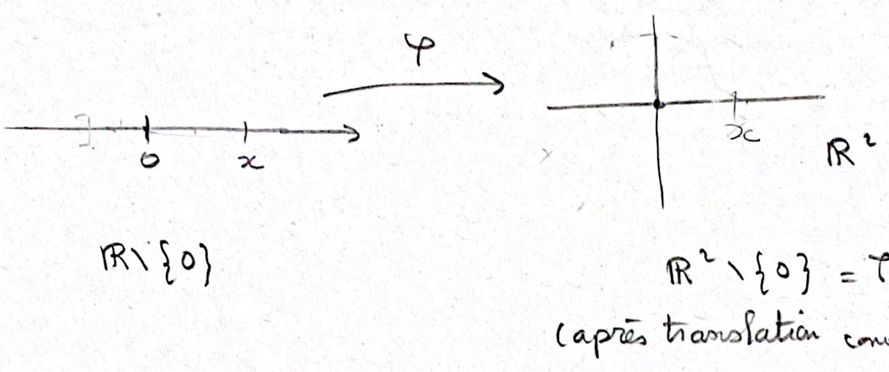
Montrer que I et S^1 ne sont pas homéomorphes.

② Même question pour $[0, 2\pi[$ et S^1

③ $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Solutions

③ $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$?



$E = \bigcup_{i=1}^{n}$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\qquad$ $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \varphi(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

(après translation convenable

2 composantes connexes $\qquad$ 1 composante connexe

⇓

φ non homéomorphisme. (cf. Rem 1)

Remarque 1 : $f : E \to E'$ homéomorphisme.

Alors le nbre de composantes connexes de E est égal au nbre de composantes connexes de E'

Preuve :

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} C(x_i)$$

$$\begin{cases} f(C(x_i)) = \text{connexe contenant } f(x_i) : f(C(x_i)) \subset C(f(x_i)) \\ f(E) = E' = \bigcup_{i=1}^{n} f(C(x_i)) \end{cases}$$

Remarque 2 : $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ = connexe eu égard à l'exercice ③ de cette feuille.

En effet : $a \underset{\neq}{\subset} \mathbb{R}$ $\quad$ $b \underset{\neq}{\subset} \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\{(\{a\} \times \{b\})$ est connexe

(on dit : a est "propre") $\qquad$ $\{(a,b)\}$ est connexe.

I.M.S.P
77-78

C_1 Topologie
Feuille n° 9

x I. Soit E un espace normé ; montrer qu'il ne peut exister deux applications linéaires continues u, v de E dans lui même telles que $u \circ v - v \circ u = Id_E$.
Pour cela, on pourra montrer que ceci impliquerait :
$$u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1) v^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

X II. Soit C_0 l'espace de Banach des suites $X = (x_n)_n$ de nombres complexes telles que $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ normé par $\|X\| = \sup_n |x_n|$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $e_n = (\delta_{j,n})_j \in C_0$ où $\delta_{j,n}$ est le symbole de Kronecker.

1) Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire continue de C_0 dans C_0 telle que :
$$u(e_n) = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) e_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2) Soit $v : C_0 \to C_0$ telle que $v(X) = \frac{1}{2}(1 + \|X\|) e_0 + u(X)$
Montrer que v est continue.

3) Plus précisément, montrer que, pour $X \neq Y$, on a
$\|v(X) - v(Y)\| < \|X - Y\|$ mais que v n'admet pas de point fixe.

III. 1) Dans un espace normé E, soit H l'hyperplan fermé d'équation
X $u(x) = 0$ où u est une forme linéaire continue sur E.
Montrer que pour tout point $a \in E$, on a : $d(a, H) = \frac{|u(a)|}{\|u\|}$

2) Montrer que $u(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$ définit une forme linéaire continue sur C_0 et calculer précisément $\|u\|$.

3) Soit H l'hyperplan fermé de C_0 d'équation $u(x) = 0$.

Si $X \notin H$, montrer qu'il n'existe pas de point $Y \in H$ tel que $d(X, H) = d(X, Y)$.

(IV) Montrer que le quotient d'un espace de Banach E par un sous-espace vectoriel fermé F est un espace de Banach (E/F étant muni de la norme : $\|\dot{x}\| = \inf_{z \in \dot{x}} \|z\|$)

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{}$

① Par récurrence sur n :

$n=0$ $\quad u \circ v - v \circ u = Id_E$ oui (1)

n : $\quad u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)\, v^n$ vrai (1')

Alors $\quad u \circ v^{n+2} - v^{n+1} \circ u \circ v = (n+1)\, v^{n+1}$

et $\quad v^{n+1} \circ u \circ v = v^{n+1}\,(Id_E + v \circ u)$

$= v^{n+1} + v^{n+2} \circ u$

Donc $\quad u v^{n+2} - v^{n+2} u = (n+2)\, v^{n+1}$ ⟺ propriété vraie au rang $n+1$.

Ceci.

Cela étant, en supposant par l'absurde que $u, v \in \mathcal{L}(E,E)$ (Espace $\mathcal{L}(E,E)$ = algèbre de Banach)

$\|(n+1)\, v^n\| \leqslant \|u v^{n+1}\| + \|v^{n+1} u\|$

$(n+1)\, \|v^n\| \leqslant 2\, \|u\|\, \|v^n\|\, \|v\|$ si $\|v^n\| \neq 0$ (↗ sinon $\|v^n\| = 0$ ⇓ $v^{n-1} = 0$ (voir (1')) ⇓ ~~$uv - vu = 0$~~ $v = 0$)

$(n+1) \leqslant 2\, \|u\|\, \|v\|$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ce qui est faux car $\|u\|$ et $\|v\| < \infty$ et $n \in \mathbb{N}$.

Donc $u, v \notin \mathcal{L}(E,E)$ simultanément.

CQFD

CACA

COEFFICIENT
Melle BLACHE : 0,001

(2)

n°1

$e_n = (0, \dots, \underset{n^\text{e} \text{ place}}{1}, \dots)$

$\begin{cases} u(e_n) = \left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) e_{n+1} & \forall n \in \mathbb{N} \\ u \text{ linéaire} \end{cases}$

~~* Unicité~~

~~$\forall x \in C_0$ $\quad u(x) \overset{?}{=} u'(e_n)$~~

(combinaisons linéaires finies toujours)

L'espace vectoriel engendré par les e_n est l'espace des suites s'annulant à partir d'un certain rang (C_{00}). En effet, pour la norme $\| \ \|$ (sup), C_{00} est dense dans C_0 : $\overline{C_{00}} = C_0$

* Unicité

$u : C_{00} \longrightarrow C_0$ est unique sur C_{00} (propriété purement algébrique)

Or $\overline{C_{00}} = C_0$. Le th. de cours montre que $\bar{u}$ (prolongement de u sur $\overline{C_{00}} = C_0$) est unique.

* Existence :

$u : C_{00} \longrightarrow C_0$ linéaire.

u est-elle continue dans C_{00} ?

$X \in C_{00}$ $\quad X = (x_0, x_1, \dots, x_N, 0, \dots 0)$

$= \sum_{k=0}^{N} x_k e_k$

$u(X) = \sum_{k=0}^{N} x_k \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) e_{k+1} = \Big(0, \overbrace{x_0\left(1-\tfrac{1}{2}\right)}^{2^\text{e}}, x_1\left(1-\tfrac{1}{2^2}\right), \dots, \overbrace{x_N\left(1-\tfrac{1}{2^{N+1}}\right)}^{N+2^\text{e} \text{ terme}}, 0, \dots$

Remarque sur le n°②

~~Soit E~~ Th. de Zorn : "Tout ensemble ordonné inductif admet un élément maximal." ⇕ (*/*)

* élément maximal = c'est un élément de $\mathcal{A}$ qui majore tout élément de $\mathcal{A}$ qui lui est comparable.

(rappel : (*) * p.grand élément = c'est un élément de $\mathcal{A}$ qui majore tout élément de $\mathcal{A}$.)

Ici : Tout sous-ensemble totalement ordonné admet un majorant. (*/*)

Th. Base incomplète

Soit E un espace vectoriel, et { G une famille génératrice de E ; L une famille libre de E (⟺ toute combinaison linéaire finie = 0 ⟺ tous les coefficients α_i sont nuls)

Alors il existe B base de E telle que $L \subset B \subset G$

Démonstration : Soit $\mathcal{A} = \{ M$ partie libre de E $/ L \subset M \subset G \}$ ($\neq \emptyset$ car $L \in \mathcal{A}$)

Je dirai que $M \leq M' \iff M \subset M'$ (relation d'ordre)

• Montrons que $\mathcal{A}$ est inductif

Soit $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ totalement ordonné : $\mathcal{A}' = \{M_i \quad i \in I\}$

Alors $N = \bigcup_{i \in I} M_i$: $N \subset G$ (car $M_i \subset G \ \forall i$)

$M_i \subset N$ (à fortiori)

N est libre ? Cela provient du fait que $\mathcal{A}'$ est totalement ordonné : montrons le. Soit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ ($\lambda_i \in K$; $x_i \in N$). C'est une combinaison linéaire finie. $\forall i$ $(1 \leq i \leq n)$ $\exists M_i \in \mathcal{A}'$ $x_i \in M_i$. J'ai un nbre fini de M_i $(1 \leq i \leq n)$ qui sont tous comparables par $\leq$ (puisque $\mathcal{A}'$ est totalement ordonné) ~~Alors~~ : il existe un plus grand élément M_{i_0}, ~~donc~~. Notre combinaison linéaire $\sum \lambda_i x_i = 0$ est en fait une combinaison linéaire d'éléments de M_{i_0} $\Rightarrow \lambda_i = 0$ $(1 \leq i \leq n)$. ■

• Donc $\mathcal{A}$ admet un élément maximal (Théorème de Zorn), soit $B \in \mathcal{A}$

Alors $L \subset B \subset G$.

• Montrons que B est une base.

B est une partie libre. Montrons qu'elle est aussi une partie génératrice

Soit $x \in G$: $L \subset B \cup \{x\} \subset G$

Comme B est une partie libre maximale, $B \cup \{x\}$ n'est pas une partie libre.
(si $x \notin B$)

~~Si~~ D'où x est combinaison linéaire (finie) d'éléments de B.

Donc tout $x \in E$ est combinaison linéaire d'éléments de B.

CQFD

$$\|u(X)\| = \sup_{0\leq k\leq N} \Big| x_k \overbrace{\Big(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\Big)}^{\leq 1} \Big|$$

$$\leq \sup_{0\leq k\leq N} |x_k| = \|X\|$$

u est continue en 0 $\Leftrightarrow$ continue partout (car u linéaire)

On utilise ensuite le th. de prolongement pour en déduire l'existence de $u \in \mathcal{L}(C_0, C_0)$.
$\overset{\shortparallel}{\overline{C_{00}}}$

2°) $v : C_0 \to C_0$

$$X \mapsto \frac{1}{2}(1 + \|X\|)\, e_0 + u(X)$$

v n'est pas linéaire, mais elle est continue (somme et composée de fcts continues)

3°) Si $X \neq Y$ alors $\|v(X) - v(Y)\| < \|X - Y\|$

$X \in C_0$: $X = \lim_{N\to+\infty} \underset{\sim}{X^{(N)}}$

suite tronquée à l'ordre N $\quad X^{(N)} = (x_0, \dots, x_N, 0, \dots)$

si $X = (x_0, \dots, x_n, \dots)$

$$u(X) = \lim_{N\to+\infty} u(X^{(N)})$$

$$= \lim_{N\to\infty} \Big(0, x_0\Big(1-\frac{1}{2}\Big), \dots, x_N\Big(1-\frac{1}{2^N}\Big), 0, \dots, 0, \dots\Big)$$

$$u(X) = \Big(0, x_0\Big(1-\frac{1}{2}\Big), \dots, x_n\Big(1-\frac{1}{2^n}\Big), \dots\Big) \in C_0 \text{ (oui)}$$

important. On utilise ensuite les suites tronquées.

Ainsi

$$v(X) = \Big(\frac{1}{2}(1+\|x\|), x_0\Big(1-\frac{1}{2}\Big), \dots, x_n\Big(1-\frac{1}{2^{n+1}}\Big), \dots\Big)$$

$$v(X) - v(Y) = \Big(\frac{1}{2}(\|x\|-\|y\|), (x_0-y_0)\Big(1-\frac{1}{2}\Big), \dots, (x_n-y_n)\Big(1-\frac{1}{2^{n+1}}\Big), \dots\Big)$$

$$\|v(X) - v(Y)\| = \sup\Big(\frac{1}{2}\big|\|x\|-\|y\|\big|, |x_0-y_0|\Big(1-\frac{1}{2}\Big), \dots, |x_n-y_n|\Big(1-\frac{1}{2^{n+1}}\Big), \dots\Big)$$

- $\frac{1}{2} \big| \|X\| - \|Y\| \big| \leq \frac{1}{2} \|X - Y\| < \|X - Y\|$ car $X \neq Y$ — premier terme : that's all.

- $x_n - y_n = z_n$ (≠ suite nulle). On doit comparer : $\underbrace{\sup_{n \geq 0} |z_n| \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}_{u_n} < \sup_{n \geq 0} |z_n|$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \Rightarrow \sup |u_n|$

Si $\exists\, u_p \neq 0 \,/\, |u_p| = \varepsilon$ $\quad \underbrace{\exists N}_{\geq p} \quad n \geq N \quad |u_n| \leq \varepsilon$

Alors $\sup |u_n| = \underbrace{\sup(|u_0|, \dots, |u_N|)}_{\geq \varepsilon}$ ⇒ le sup est forcément atteint sur ce nbre fini d'éléments.

On applique ce résultat à $|z_n| \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$:

$$\exists\, n_0 \,/\, \sup_{n \geq 0} |z_n| \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = |z_{n_0}| \left(1 - \frac{1}{2^{n_0+1}}\right)$$

$$< |z_{n_0}| \leq \sup |z_n|$$

↑ (ya bon !)

donc $\|v(X) - v(Y)\| < \|X - Y\|$

v n'admet pas de point fixe

v n'admet pas de point fixe.

$$v(X) = \left(\frac{1}{2}(1+\|X\|) \,,\, x_0\left(1-\frac{1}{2}\right), \dots, x_n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right), \dots \right)$$

($n+1$ terme)

Si v admet un pt fixe, alors :
$$\begin{cases} \frac{1}{2}(1+\|X\|) = x_0 \\ x_0\left(1-\frac{1}{2}\right) = x_1 \\ \dots \\ x_n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) = x_{n+1} \end{cases}$$

donc $x_n = \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2}\right)x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

et $x_0 = \frac{1}{2}(1+\|X\|)$

(Donc $|x_n| \leq |x_0| \Rightarrow \|X\| = |x_0|$ $\quad x_0 = \frac{1}{2}(1+|x_0|)$ $\quad$ ($x_0 = 1$ par ex))

sa ne marche pas.

Autre possibilité : $x_n \not\to_{n\to+\infty} 0$

Passons au logarithme :
$$\ln x_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right) + \ln x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Considérons :

$\ln(1-a)$. On veut trouver une constante A telle que $\ln(1-a) \geq -Aa$ $\quad \left(a = \frac{1}{2^n}\right)$

Etudions donc $\ln(1-a) + Aa \; (\overset{?}{\geq} 0)$ $\quad 0 \leq a \leq \frac{1}{2}$

dont la dérivée est $-\frac{1}{1-a} + A = \frac{(A-1)-Aa}{1-a} \geq 0$

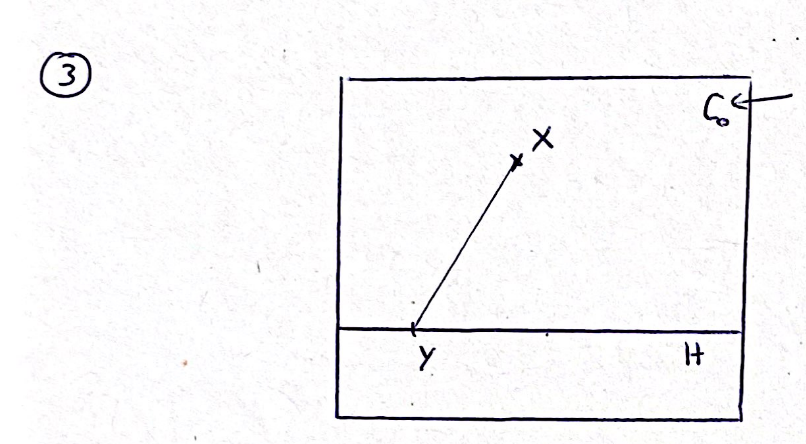
pour $a = \frac{1}{2}$, $\quad (A-1) - \frac{A}{2} \geq 0 \Leftrightarrow A \geq 2$ $\quad$ (donc 2 marche !)

Alors la fct sera croissante et vaudra 0 en $a=0$. Donc,
$$\ln(1-a) + 2a \geq 0 \quad \forall a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \ln x_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} (-2)\frac{1}{2^n} + \ln x_0 = \underbrace{(-2).1 + \ln x_0}_{> -\infty}$

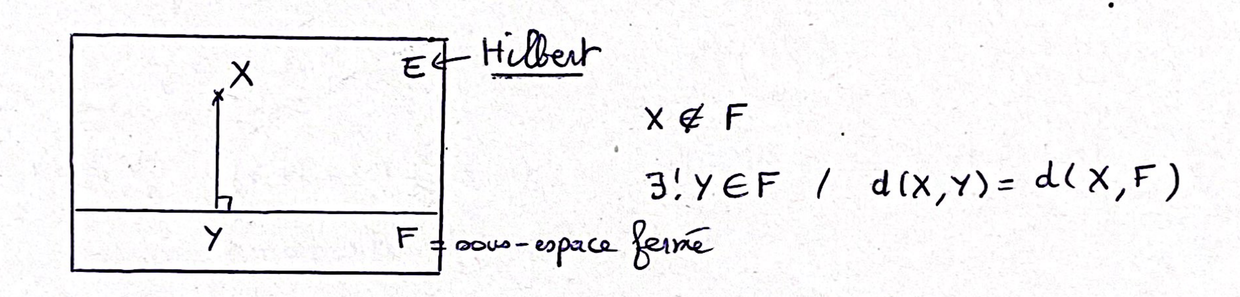
Ainsi $\lim_{n\to+\infty} x_n \neq 0$ ce qui montre que $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas un élément de $C_0^\circ \Rightarrow v : C_0 \to C_0$ n'admet pas de point fixe.

③



$X \notin H$

$\nexists Y \in H \;/\; d(X,Y) = d(X,H)$



Rappel : Banach = Espace vectoriel normé et complet.

Hilbert = " " " dont la norme provient d'un produit scalaire.

1°/ H = hyperplan fermé associé à la forme linéaire continue u

$a \in E$ Montrer que $d(a,H) = \dfrac{|u(a)|}{\|u\|}$

* Si $a \in H$ $\quad d(a,H) = 0 = \dfrac{|u(a)|}{\|u\|}$

* Si $a \notin H$, alors $E = H \oplus \mathbb{C}a \Rightarrow x = y + \lambda a \quad \forall x \in E$

$$\|u\| = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{|u(x)|}{\|x\|}$$

Ainsi :

$$d(a,H) = \operatorname{Inf}_{y \in H} \|y-a\| \qquad (1)$$

et, d'autre part :

$$\frac{|u(a)|}{\|u\|} = \operatorname{Inf}_{x \in E\setminus\{0\}} \left(\frac{|u(a)|}{\frac{|u(x)|}{\|x\|}} \right) = \operatorname{Inf}_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} \\ y \in H}} \left(\frac{|u(a)| \ \|\lambda x\|}{|\lambda| \ |u(a)|} \right)$$

$$= \operatorname{Inf}_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} \\ y \in H}} \left(\frac{\|y+\lambda a\|}{|\lambda|} \right) = \operatorname{Inf}_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} \\ y \in H}} \left\| \frac{y}{\lambda} + \frac{\lambda}{|\lambda|} a \right\| \qquad (2)$$

Ainsi : pour $\lambda = -1$ (2) montre que $\frac{|u(a)|}{\|u\|} \leq d(a,H)$

Inversement, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $y \in H$ $\exists y' = \frac{y}{\lambda}$ (au signe près) $\in H$

tel que $\frac{y}{\lambda} + \frac{\lambda}{|\lambda|} a = y' - a$

Ce qui montre que $d(a,H) \leq \frac{|u(a)|}{\|u\|}$.

Donc $\boxed{d(a,H) = \frac{|u(a)|}{\|u\|}}$

<u>Remarque</u> : de (2) on aurait pu écrire $\frac{|u(a)|}{\|u\|} = \operatorname{Inf}_{y \in H} \|y-a\|$

puisque $\forall y \in H$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$\frac{y}{\lambda} + \frac{\lambda}{|\lambda|} a$$

$\|$ ~~(biunivoquement)~~

$\exists! y'$ $\qquad y' - a$

où $y' \in H$

et inversement. d'où l'égalité.

2°/ $u(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$ (bien défini sur C_0.)

$u : C_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire continue ?

(linéaire par consturction)

<u>Continuité de u</u>

$\forall X \neq 0 \quad \|u(X)\| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \right| < 2 \ \|X\|$ (où $\|X\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$)

<u>Valeur de $\|u\|$</u>

On a vu que $\|u\| \leq 2$. Montrons que $\|u\| = 2$.

Prenons la suite $X^N = (1, 1, \ldots, \underset{\text{rang } N+1}{\overset{x_N}{1}}, 0, \ldots 0, \ldots) \in C_0$

Alors $u(X^N) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x_n}{2^n} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n}$

et $\lim_{N \to +\infty} u(X^N) = 2$

Ainsi : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad M > N \Rightarrow |u(X^M) - 2| < \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{|u(X^M)|}{\|X^M\|} > 2 - \varepsilon$

puisque $\|X^M\| = 1$

Ce qui montre que $\|u\| \geq 2$. (Caractérisation de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$)

3°/ H = hyperplan fermé de C_0 d'équation $u(X) = 0$

$X \notin H \Rightarrow \nexists Y \in H \ / \quad d(X, H) = d(X, Y)$

$X \notin H$ et $Y \in H$: $\begin{cases} d(X, H) = \frac{|u(X)|}{2} = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{2^{n+1}} \right| & \text{car } Y \in H \\ d(X, Y) = \sup_{n \geq 0} |x_n - y_n| \end{cases}$

Posons $z_n = x_n - y_n \longrightarrow 0 \ (n \to +\infty)$ et $z_n \neq$ suite nulle (car $X \notin H$)

On veut comparer $\left| \sum_{0}^{\infty} \frac{z_n}{2^{n+1}} \right|$ et $\sup_{n \geq 0} |z_n|$

③

On a : $\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{2^{n+1}}\right| \leq \text{Sup}|z_n|$ (on le sait depuis longtemps !)

Montrons qu'il n'y a pas l'égalité :

on considère $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Sup}_k |z_k| - |z_n|}{2^{n+1}} = 0 \iff \forall n \quad |z_n| = \text{Sup}|z_n|$

↑ (par l'absurde) ; $|z_n| \to 0$

⇓

$\forall n \quad z_n = 0$ absurde car $z_n \neq$ suite nulle.

Donc $\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{2^{n+1}}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z_n|}{2^{n+1}} < \text{Sup}_k |z_k|$ oui.

④ E complet ⇒ E/F ~~aussi~~ complet

$(\dot{x}_n)_n$ suite de Cauchy de E/F

$\dot{x}_1 \ni x_1$

$\dot{x}_2 \ni y_2$ tel que $\|y_2 - x_1\|$ soit aussi voisine que l'on veut de $\|\dot{x}_2 - \dot{x}_1\|$ (à ε' près)

$\dot{x}_3 \ni y_3$ tel que $\|y_3 - y_2\|$ " " $\|\dot{x}_3 - \dot{x}_2\|$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \; / \; \begin{matrix} n \geq N \\ p \geq 0 \end{matrix} \quad \|\dot{x}_{n+p} - \dot{x}_n\| < \varepsilon$.

$\|y_{n+p} - y_n\| \leq \|y_{n+p} - y_{n+p-1}\| + \dots \|y_{n+1} - y_n\|$
$\leq p(\varepsilon + \varepsilon')$ qui dépend de p !

pour définir une sous-suite

$\forall k \quad \exists\, n_k > n_{k-1} \quad tq \quad \forall n, m \geq n_k \quad \| \dot{x}_n - \dot{x}_m \| < \frac{1}{2^k}$

$\dot{x}_{n_1} \ni y_1 = x_{n_1}$

$\dot{x}_{n_2} \ni y_2$ tel que $\| y_2 - y_1 \| < \frac{1}{2}$ (car $\| \dot{x}_{n_2} - \dot{x}_{n_1} \| < \frac{1}{2}$. On choisit ε' de façon à ce que $\exists\, y_2 \in \dot{x}_2$ $\| \dot{x}_{n_2} - \dot{x}_{n_1} \| \leq \| y_2 - y_1 \| < \frac{1}{2}$) ($y_1 = x_{n_1}$)

$\dot{x}_{n_3} \ni y_3$. tq $\| y_3 - y_2 \| < \frac{1}{2^2}$

$\dot{x}_{n_k} \ni y_k$ $\quad \| y_k - y_{k-1} \| < \frac{1}{2^{k-1}}$ car $\| \dot{x}_{n_k} - \dot{x}_{n_{k-1}} \| < \frac{1}{2^{k-1}}$

Cette suite (y_k) est de Cauchy :

$$\| y_{k+p} - y_k \| \leq \underbrace{\| y_{k+p} - y_{k+p-1} \|}_{< \frac{1}{2^{k+p-1}}} + \dots + \underbrace{\| y_{k+1} - y_k \|}_{< \frac{1}{2^k}}$$

$$\leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

Comme E est complet, $y_k \to y$ $(k \to +\infty)$ et $y \in E$

$$\| \dot{x}_{n_k} - \dot{y} \| \leq \| y_k - y \| \underset{(k \to +\infty)}{\longrightarrow} 0$$

Donc $\dot{x}_{n_k} \longrightarrow \dot{y}$ $(k \to +\infty)$

On a donc une suite de cauchy $(\dot{x}_n)_n$ dans E/F tel qu'une sous-suite est convergente. Donc la suite est convergente.
(cf. Résultat mentionné en cours)

(5)

Si dans un e.v.n. toute série normalement convergente est convergente, alors c'est un espace de Banach

(Réciproque de : E Banach $\Rightarrow$ toute série n.conv. est convergente)

Preuve

$(x_n)_n$ suite de Cauchy dans E.

Donc $\forall k > 0 \quad \exists n_k > n_{k-1} \ / \quad p, q \geq n_k \Rightarrow \|x_p - x_q\| < \frac{1}{2^k}$

Ces n_k vont nous définir une sous-suite de la suite $(x_n)_n$.

$x_{n_1} \in E$

$x_{n_2} \in E \qquad \|x_{n_2} - x_{n_1}\| < \frac{1}{2}$

$x_{n_3} \in E \qquad \|x_{n_3} - x_{n_2}\| < \frac{1}{2^2}$

- - - - - - - - - - - - - -

$x_{n_k} \qquad \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| < \frac{1}{2^k}$

$$\|x_{n_K}\| \leq \sum_{k=2}^{K} \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$$

La série $\sum_{k=2}^{\infty} \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\|$ est normalement convergente. Donc (voir hypothèse)

$\sum_{k=2}^{\infty} (x_{n_k} - x_{n_{k-1}})$ converge $\Rightarrow \lim_{K \to +\infty} \underbrace{\sum_{2}^{K} x_{n_k} - x_{n_{k-1}}}_{= x_{n_K} - x_{n_{1}}}$ converge $\Rightarrow x_{n_K}$ converge.

$$\left.\begin{array}{l}(x_n)_n \text{ suite de Cauchy} \\ (x_{n_k})_k \text{ converge dans } E\end{array}\right\} \Rightarrow E = \text{Banach (c.à.d e.v.n. complet)}$$

CQFD

Conclusion à savoir :

Th : E désignant un e.v.n. C'est un Banach si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

Z

I.M.S.P

77.78

C 1 Topologie

Feuille n°: 10

X (I) Soient E un espace normé sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert convexe non vide de E, F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \cap \Omega = \emptyset$.
Montrer qu'il existe une forme linéaire f continue dans E telle que $f(x) = 0$ sur F et $f(x) > 0$ dans Ω.

X (II) Soient E un espace normé sur $\mathbb{R}$, Ω_1 un ouvert convexe non vide de E et Ω_2 un convexe non vide de E tel que $\Omega_2 \cap \Omega_1 = \emptyset$.
Montrer qu'il existe un hyperplan fermé H de E dont un translaté sépare Ω_1 et Ω_2.

X

(III) Soient E un espace normé sur $\mathbb{R}$, Ω un convexe fermé non vide de E, K un convexe compact de E ne rencontrant pas Ω.
Montrer qu'il existe un hyperplan fermé H dont un translaté sépare strictement Ω et K.
On pourra d'abord montrer qu'il existe un voisinage ouvert convexe V de 0 tel que $(\Omega + V) \cap (K + V) = \emptyset$.

X

(IV) Dans un espace normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toute variété linéaire fermée est l'intersection des variétés linéaires hyperplanes fermées qui la contiennent.

× **(V)** Soient E et F deux espaces normés.

Montrer l'équivalence :

$$F \text{ complet} \iff \mathcal{L}(E,F) \text{ complet}.$$

On pourra considérer une suite de Cauchy $(y_n)_n$ d'éléments de F ~~qui ne converge pas~~ et un élément x de E tel que $\|x\| = 1$. Si f est une forme linéaire continue sur E telle que $f(x) = 1$ et $\|f\| = 1$, étudier la suite $(g_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{L}(E,F)$ définis par $g_n(z) = f(z)\, y_n$.

×

(VI) 1°) Soient E un espace normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer l'équivalence :

(1) $x_0 \notin \overline{F} \iff \exists\, f \in \mathcal{L}(E;\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ telle que $f(x_0) \neq 0$ et $f_{/F} = 0$.

2°) En déduire que F est dense dans E si et seulement si toute forme linéaire continue sur E nulle sur F est aussi nulle sur E.

F 3°) En déduire aussi que si F est fermé dans E et si E est un espace réflexif, F est aussi un espace réflexif.

(VII) 1) Montrer que si un espace de Banach E est réflexif, toute forme linéaire continue sur E admet un maximum sur la boule unité fermée de E.

2) Montrer que $\mathscr{C}_{\mathbb{C}}(I)$ muni de la norme de la convergence uniforme n'est pas réflexif (on pourra utiliser la forme linéaire $f \longmapsto \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^{1} f(t)\,dt$).

3) Montrer que ℓ^1 n'est pas réflexif (on pourra utiliser la forme linéaire définie par la suite $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$)

① E = e.v.n réel

Ω ouvert convexe $\neq \emptyset$

F = s.e.v. / $F \cap \Omega = \emptyset$

Th. de Hahn-Banach : $\exists H$ hyperplan $H \supset F$ $H \cap \Omega = \emptyset$

Soit f définissant H : $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $f(H) = 0 \Rightarrow f(F) = 0$.

De plus Ω convexe $\Rightarrow \Omega$ connexe $\Rightarrow f(\Omega)$ connexe (car f continue)

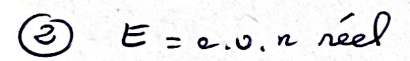
et $f(x) \neq 0$ $\forall x \in \Omega$ (car $\Omega \cap H = \emptyset$)

donc $f(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$

ou

$f(\Omega) \subset \mathbb{R}_-$

On prends, suivant le cas f ou $-f$.


② E = e.v.n réel

Ω_1 ouvert convexe $\neq \emptyset$

Ω_2 convexe $\neq \emptyset$

$\Omega_2 \cap \Omega_1 = \emptyset$

$f(x) > \alpha$

H_0 $f(x) = \alpha$

Ω_1

Ω_2

$f(x) < \alpha$

H_0 = translaté de l'hyperplan dont on veux montrer l'existence

Posons $\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 = \{x - y \in E \ / x \in \Omega_1 \quad y \in \Omega_2\}$

Que dire de cet Ω ?

* $\Omega = \bigcup_{x_2 \in \Omega_2} \underbrace{(\Omega_1 - x_2)}_{\text{ouvert}}$ — <u>Ω ouvert</u>

* Soient x et $y \in \Omega$ $\begin{cases} x = x_1 - x_2 \\ y = y_1 - y_2 \end{cases}$

$\lambda \in [0,1]$: $\lambda x + (1-\lambda) y = (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1) - (\lambda x_2 + (1-\lambda) y_2)$
$\in \Omega$

donc <u>Ω convexe</u>

* $0 \notin \Omega$ et $\Omega \neq \emptyset$

Prenons $\{0\} = F$ (s.e.v.) et appliquons le 1e exercice de cette feuille.

$\exists f : E \to \mathbb{R}$ linéaire continue telle que $f(z) > 0$ dans Ω

Ainsi $f(x_1) > f(x_2)$ $\forall x_1 \in \Omega_1$ et $\forall x_2 \in \Omega_2$

Posons $\alpha = \inf_{x_1 \in \Omega_1} f(x_1)$ $\quad f(x_1) \geq \alpha \quad \forall x_1 \in \Omega_1$

alors : $\quad f(x_2) \leq \alpha \quad \forall x_2 \in \Omega_2$

Ainsi $f(x_1) \geq \alpha \geq f(x_2)$

Or :

U ouvert de E (e.v.n) $\xrightarrow{f \neq 0} \mathbb{R}$ $\quad f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

$\nexists x_0 \in U \ / \ f(x_0) = \inf_{x \in U} f(x)$

Ω_2 supposé ouvert ↙

<u>Par l'absurde</u> :

on va montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que $\exists x \in V$, $\exists y \in V$ / $f(x) > \alpha$ et $f(y) < \alpha$

$\exists a \ / \ f(a) = 1$. Prenons $z + \lambda a$, on a $f(x_0 + \lambda a) = \alpha + \lambda$. Pour λ suffisamment petit $z + \lambda a \in V(z)$. Donc, pour $\lambda > 0$ $f(x_0 + \lambda a) > \alpha$, pour $\lambda < 0$ $f(x_0 + \lambda a) < \alpha$ → ce qui contredit le fait que ... est

(3) E e.v.n. sur $\mathbb{R}$

Ω convexe fermé $\neq \emptyset$

K convexe compact / $K \cap \Omega = \emptyset$

? $\exists H$ hyperplan fermé dont un translaté sépare strictement Ω et K

. Montrons qu'il existe un voisinage ouvert de 0, soit V, / $(\Omega + V) \cap (K + V) = \emptyset$

cf TD $\left.\begin{array}{l}\Omega \text{ fermé} \\ K \text{ compact}\end{array}\right\} \Rightarrow d(K, \Omega) > 0$ Posons $\varepsilon = d(K, \Omega)$

On prend $V(0) = B(0, \frac{\varepsilon}{2})$

On considère $x_0 \in (\Omega + V) \cap (K + V)$

$$x_0 = \underbrace{x}_{\in \Omega} + \underbrace{h}_{\in V} = \underbrace{y}_{\in K} + \underbrace{k}_{\in V} \Rightarrow x - y = k - h$$

$\|x - y\| \geq \varepsilon$ car $d(K, \Omega) = \varepsilon$

or $\|h - k\| < \varepsilon$ car $V = B(0, \frac{\varepsilon}{2})$

d'où l'absurdité

V est donc convexe ouvert / $(\Omega + V) \cap (K + V) = \emptyset$

V étant convexe, $\Omega + V$ et $K + V$ sont 2 ouverts convexes

Appliquons l'exercice n° 2 :

$\exists H$ variété hyp. fermée de E, soit H d'équation $f(z) = \alpha$ tq

$f(z) > \alpha$ $z \in \Omega + V$

$f(z) < \alpha$ $z \in K + V$

(4) E normé

M variété linéaire fermée

$M = \cap H$ où H variété lin. hyperplane fermée $H \supset M$

* On a : $M \subset \cap H$ d'évidence.

* Réciproquement ? $\cap H \subset M$

On montre que $\complement M \subset \complement \cap H$

Soit $x \notin M$, il faut montrer que $\exists H$ variété lin. hyp. fermée contenant M tq $x \notin H$. Pour appliquer le th. de Hahn-Banach, il faut trouver un ouvert convexe $\neq \emptyset$ de E. $\complement M$ étant ouvert $\exists \underbrace{B(x, \varepsilon)}_{\Omega} \subset \complement M$ donc $\Omega \cap M = \emptyset$

d'où $\exists$ variété lin. hyp. fermée H contenant M et telle que $H \cap B(x, \varepsilon) = \emptyset$

$$\Downarrow$$
$$x \notin H$$

⑤ E, F e.v.n.

Montrer l'équivalence $\boxed{F \text{ complet} \Leftrightarrow \mathcal{L}(E,F) \text{ complet}}$

($\Rightarrow$) cf cours

($\Leftarrow$) Réciproquement,

On considère $x \in E$ / $\|x\| = 1$ (on a supposé $E \neq \{0\}$). Soit f une forme lin. continue sur E / $f(x) = 1$ et $\|f\| = 1$ (elle existe en vertu du lemme de cours). Considérons l'application :

$$\varphi : F \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$$
$$y \longmapsto g_y : E \longrightarrow F$$
$$z \longmapsto f(z)\, y$$

Rem : g_y est linéaire, est bien continue car :

$$\|g_y(z)\| = \|f(z)y\| = |f(z)|\, \|y\| \leq \|y\|\, \underbrace{\|f\|}_{=1}\, \|z\|$$

donc $\|g_y\| \leq \|y\|$

d'autre part, pour $x = y$ $\quad g_y(x) = f(x)\, y = y \Rightarrow \|g_y\| \geq \|y\|$

Donc $\boxed{\|g_y\| = \|y\|}$

(φ est donc une isométrie)

$F \underset{\sim}{\overset{\sim}{}} \varphi(F) \subset \mathcal{L}(E,F)$

isomorphisme d'e.v. ($\Leftrightarrow$ homéomorphisme linéaire)

~~Pour montrer que F est complet, il suffit donc de montrer que F est fermé~~.

On identifie F à $\varphi(F)$. Montrer que F est complet équivaut à montrer que

F est fermé dans $\mathcal{L}(E,F)$. Soit $g \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $g \in \overline{\varphi(F)} = \overline{F}$

Alors $g = \lim_{+\infty} g_{y_n}$. Il faut montrer que $g \in \varphi(F)$ c.à.d que $\exists y \in F$ tel que $g = g_y$.

$$g = \lim_{+\infty} g_{y_n} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad n > N \Rightarrow \| g - g_{y_n} \| < \varepsilon \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \forall z \in E \quad \| g(z) - f(z) y_n \| < \varepsilon$$
$$\|z\| = 1$$

Ainsi, pour $z = x$ ($\|x\| = 1$) on a $\| g(x) - y_n \| < \varepsilon$

donc : $g(x) = \lim_{+\infty} y_n$

Posons $y = g(x)$ et montrons que $g = g_y$. Pour cela, observons que

$$\| g_y(z) - g_{y_n}(z) \| = \| f(z) y - f(z) y_n \| = |f(z)| \, \| y - y_n \|$$

$$\| g_y(z) - g_{y_n}(z) \| \leq \|z\| \, \|y - y_n\|$$

d'où $\quad \| g_y - g_{y_n} \| \leq \|y - y_n\| \to 0 \quad (n \to +\infty) \qquad (2)$

et $\quad \| g_y - g \| \leq \underbrace{\| g_y - g_{y_n} \|}_{< \varepsilon \ (\text{cf}(2))} + \underbrace{\| g_{y_n} - g \|}_{< \varepsilon \ (\text{cf}(1))} \quad$ pour $n > M$

D'où $\quad g = g_y \in \varphi(F) = F$. On a bien montré que $\overline{F} \subset F$.

F est fermé.

⑥ E e.v.n. sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $\qquad$ 1°/

F sev de E

Alors $\boxed{x_0 \in \overline{F} \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \,/\, f|_F = 0 \text{ alors } f(x_0) = 0}$

C'est une application importante du théorème de Hahn-Banach, théorème fondamental pour les e.v. normés.

Cette équivalence permet de voir si un sev F de E est dense dans E.

($\Rightarrow$) facile $\quad$ Si $x_0 \in \overline{F}$ et si $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ vérifie $f|_F = 0$

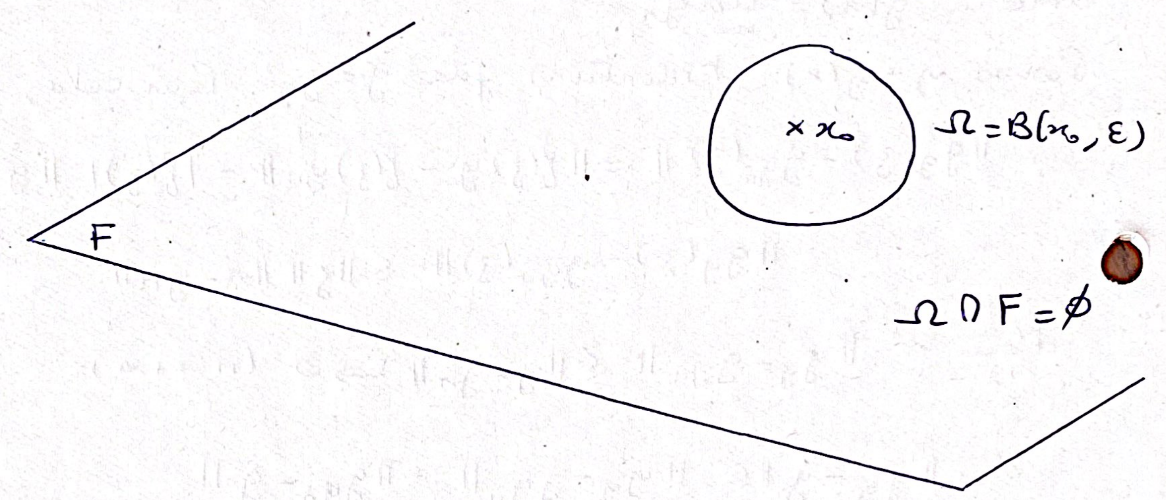
Alors $\operatorname{Ker} f$ est fermé dans E, et $F \subset \operatorname{Ker} f \Rightarrow \overline{F} \subset \operatorname{Ker} f$.

D'où $\quad x_0 \in \overline{F} \Rightarrow f(x_0) = 0$

($\Leftarrow$) dm. On montre la contraposée. Si $x_0 \notin \bar{F}$, il existe une boule ouverte $B(x_0, \varepsilon)$ telle que $x_0 \in B(x_0, \varepsilon) \subset \complement \bar{F}$

Posons $\Omega = B(x_0, \varepsilon)$. C'est un ouvert convexe non vide. De plus $\Omega \cap F = \emptyset$. Donc $\exists H$ hyperplan fermé tel que $F \subset H$ et $H \cap \Omega = \emptyset$.

Soit $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ définissant H. Alors $\ell|_F = 0$ et pourtant $\ell(x_0) \neq 0$.



2°/ Evident :

$\bar{F} = E \Leftrightarrow \forall x \in E \ x \in \bar{F} \Leftrightarrow \forall x \in E \ \forall f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \ f|_F = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \ f|_F = 0 \Rightarrow f|_E = 0$

D'où le critère :

> E = e.v. normé
> F = s.e.v. de E
>
> $\bar{F} = E \Leftrightarrow \{ \forall f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \ f|_F = 0 \Rightarrow f|_E = 0 \}$

(ex4) : $x_0 \notin \bar{F} \Leftrightarrow \exists H$ hyperplan fermé de E / $\bar{F} \subset H$ et $x_0 \notin H$

AF

$\Downarrow$

Si $\left| \begin{array}{l} f(x)=0 \\ f \in E' \end{array} \right.$ est une équation de H $\quad \left\{ \begin{array}{l} f|_F = 0 \\ f(x_0) \neq 0 \end{array} \right.$

2°/ $\bar{F} = E \Leftrightarrow \{ f \in E'$ et $f|_F = 0 \Rightarrow f = 0 \}$

$(\Rightarrow)$ Si $f|_F = 0$ alors $f|_{\bar{F}} = 0$ car f continue $\Rightarrow f = 0$

$(\Leftarrow)$ ~~Sinon~~ $\left\{ \exists f \in E' \mid f|_F = 0 \text{ et } f(x_0) \neq 0 \right\} \Leftarrow x_0 \notin \bar{F} \Leftarrow \bar{F} \neq E$

$\Downarrow$

non $\{ f \in E' \quad f|_F = 0 \Rightarrow f = 0 \}$

3°/ $\left. \begin{array}{l} F \text{ fermé dans } E \\ E \text{ espace réflexif} \end{array} \right\} \Rightarrow F$ espace réflexif.

$F \to F''$ surjective ? $\qquad E \to E''$ surjective et F fermé

$x \mapsto \tilde{x}^F \qquad x \mapsto \tilde{x}$

Soit $\varphi \in F''$

* $F' \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$, $E' \xrightarrow{\hat{\varphi}} \mathbb{C}$

$\hat{\varphi}(f) = \varphi(f|_F)$ $\quad \hat{\varphi} \in E''$ (car $\hat{\varphi}$ linéaire continue)

$\exists x \in E$ / $\tilde{x} = \hat{\varphi}$ (car E refflexif)

Alors $\forall f \in E'$ $\quad \underset{f(x)}{\tilde{x}(f)} = \hat{\varphi}(f) = \varphi(f|_F) \Rightarrow f(x) = \varphi(f|_F)$

Remarques

(A) $F \xrightarrow{\alpha} E$ lin cont

$E' \xrightarrow{{}^t\alpha} F'$

$f \longmapsto f \circ \alpha$

$E \xrightarrow{u} F$ lin ~~cont~~

$E^* \xleftarrow{{}^t u} F^*$

$\langle {}^t u(f), x \rangle = \langle u ; f(x) \rangle$

?? à réviser

$\langle {}^t u(y^*), x \rangle = \langle u , y^*(x) \rangle$

$\| f \circ \alpha \|$?

$\| f \circ \alpha(x) \| \leq \|f\| \, \|\alpha\| \, \|x\|$

Si α injective alors ${}^t\alpha$ surjective. Supposons que α = isométrie

$y_1 \neq y_2 \Rightarrow \alpha(y_1) \neq \alpha(y_2)$

Soit $g \in F'$ ~~$\exists f / {}^t\alpha(f) = g$~~

~~$f \circ \alpha = g$~~ ?

$g : F \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ lin cont

α^{-1}

$\alpha(F)$

$F \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{\alpha}} \alpha(F)$ lin ~~continue~~ bijective (car α isométrie)

~~$\|\alpha(x)\| \leq$~~ $\|x\|$

$\alpha^{-1} : \alpha(F) \longrightarrow F$ lin cont bijective

$g \circ \alpha^{-1} : \alpha(F) \xrightarrow{\text{li cont}} \mathbb{R}$ $\alpha(F)$ = s.e.v. de E

H.B $\Rightarrow \exists f : E \to \mathbb{R}$ lin. cont / $f|_{\alpha(F)} = g \circ \alpha^{-1}$ et m̂ norme

$f \circ \alpha(y) = f(\underbrace{\alpha(y)}_{\in \alpha(F)}) = g \circ \alpha^{-1}(\alpha(y)) = g(y)$

$y \in F$

* En déduire que $x \in F$ (F fermé)

On utilise (1) : Si $x \notin \overline{F}$ alors $\exists f \in E' \,/\, \begin{cases} f(x) \neq 0 \\ \text{et} \\ f|_F = 0 \Rightarrow \Upsilon(f|_F) = 0 \\ \qquad \Rightarrow f(x) = 0 \end{cases}$

absurde

Donc $x \in \overline{F} = F$ $\boxed{x \in F}$

---

* Montrer que $\varphi = \tilde{x}^F$

$\hat{\varphi}(f) = f(x) = g(x)$

● $\forall g \in F'$ $\begin{cases} \varphi(g) = ~~\tilde{x}^F(g)~~ \text{ car } x \in F \\ \tilde{x}^F(g) = g(x) \end{cases}$

$\underline{\text{Co}}$ Hahn-Banach $\Big|$ $g \in F'$ $\Downarrow$ $\exists f \in E' \,/\, f|_F = g$ (et $\|f\| = \|g\|$)

$\Downarrow$

$\boxed{\varphi = \tilde{x}^F}$

Ainsi $\forall \varphi \in F''$ $\exists x \in F \,/\,$ $\varphi = \tilde{x}^F$

●

<u>Question supplémentaire</u> : Montrer que si E est un espace de Banach, alors

E réflexif $\Leftrightarrow$ E' réflexif.

Preuve : <u>au tableau</u>

⑦ 1) E reflexif

$\forall \varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$ $\quad \exists x_0 \in E$ / $|\varphi(x_0)| = \|\varphi\|$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \in B'(0,1)$

$\Updownarrow$

$\exists \tilde{x}_0 \in E''$ / $|\tilde{x}_0(\varphi)| = \|\varphi\|$
$\quad\quad \in B'(0,1)$

$\Updownarrow$ car E réflexif

(~~f~~*) $\left| \; \exists \alpha \in E'' \right.$ / ~~∄~~ $|\alpha(\varphi)| = \|\varphi\|$ $\Big\}$ vrai grace au lemme du cours appliqué à E'
$\quad\quad \in B'(0,1)$

cf (4°) Espace reflexif (normés).)

2) $f \overset{\varphi}{\longmapsto} \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,dt$ ~~φ~~

$E = \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I) \longrightarrow$ ~~ℝ~~ $\mathbb{C}$

$\varphi \in E'$, si E réflexif, on aurait ~~(*)~~ 1) ←(1e question) vérifié. Montrons qu'il n'en est rien :

<u>Calculons $\|\varphi\|$</u>

$$|\varphi(f)| = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,dt \right| \leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(t)|\,dt$$

$$\leq \int_0^1 |f(t)|\,dt \quad\quad (I)$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty \cdot 1.$$

Donc φ est continue, et de norme $\|\varphi\| \leq 1$

Donc $\varphi(f_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{n}$

Ainsi $\|\varphi\| = 1$

Supposons par l'absurde qu'il existe f telle que $|\varphi(f)| = 1$ (on peut supposer que $\|f\| = 1$ car le sup est réalisé sur la sphère)

$|\varphi(f)| = 1 \iff 1 = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt \right| \leq \dots \leq 1$ (cf. (I))

donc $\int_0^1 |f(t)|\,dt = 1$

$= \int_0^1 \|f\|\,dt \Rightarrow \int_0^1 (|f(t)| - \|f\|)\,dt = 0$

$\Downarrow$

$\forall t \quad |f(t)| = \|f\|$ car f continue.

$\forall t \quad |f(t)| = 1$

$\Uparrow$

(cf connexité de $I = [0,1]$)

$\forall t \quad f(t) = 1$

ou

$\forall t \quad f(t) = -1$

$\Uparrow$

$\varphi(f) = 0$

$\Downarrow$

$\nexists f \ / \ |\varphi(f)| = 1$ et $\varphi(f) = 0$

CQFD

3) ℓ^1 non reflexif ?

ℓ^1 muni de

$$\varphi : \ell^1 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\underset{x}{\overset{\shortparallel}{(x_k)_k}} \longmapsto \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{k}\right) x_k}$$

normalement convergente car $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$

$\Downarrow$

(commutativité : peut importe l'ordre car je suis en convergence normale)

φ est donc bien définie. φ est linéaire.

φ est-elle continue ?

$$|\varphi(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{k}\right) x_k\right| \leqslant \sum_{k\geqslant 1} \left|\left(1-\frac{1}{k}\right) x_k\right| \qquad (I)$$

$$\leqslant \sum |x_k| = \|(x_k)_k\|_1 = \|x\|_1$$

Donc $\|\varphi\| \leqslant 1$

Inversement, prenons la base de C_{00} : (e_k)

$$e_k \begin{cases} x_{kj} = 1 & \text{si } j = k \\ x_{kj} = 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Ainsi ~~$\|\varphi(e_k)\|$~~ $= |\varphi(e_k)| = 1 - \frac{1}{k} \Rightarrow \|\varphi\| = 1$

Soit x / $|\varphi(x)| = 1$ (on cherche $\|x\| = 1$)

$\Downarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|1-\frac{1}{k}\right| |x_k| = 1 = \sum_{k\geqslant 1} |x_k| \qquad (\text{voir } (I))$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left|1-\frac{1}{k}\right|-1\right) |x_k|}_{\text{tous négatifs}} = 0 \longrightarrow \left(\left|1-\frac{1}{k}\right|-1\right)|x_k| = 0 \ \forall k \Leftrightarrow |x_k| = 0 \ \forall k \geqslant 1$$

CQFD $\varphi(x) = 0$ absurde.

I.M.S.P
77 - 78

C_1 Topologie

Feuille n° 11

(I) Soit $f : I = [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $f \equiv 0$.

(II) Soit $f : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $\int_0^1\int_0^1 x^p y^q f(x,y)\,dx\,dy = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $q \in \mathbb{N}$.
Que peut-on dire de f

(III) Soient E, F deux espaces métriques compacts, f une application continue de $E \times F$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un système fini $(u_i)_{1 \le i \le n}$ d'applications continues de E dans $\mathbb{R}$ et un système fini d'applications continues de F dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\left| f(x,y) - \sum_{i=1}^{n} u_i(x)\, v_i(y) \right| \le \varepsilon \quad \text{pour tout } (x,y) \text{ dans } E \times F.$$

(IV) Soit $I = [0,1]$ et $(a_k)_{1 \le k \le n}$ une suite de n point distinct de E. Montrer que les fonctions $x \longmapsto |x - a_k|$ sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$.
En déduire que $(x,y) \longmapsto |x-y|$ de $I \times I$ dans $\mathbb{R}$ ne peut s'écrire comme somme finie $\sum_{i=1}^{n} v_i(x)\, w_i(y)$ où v_i, w_i sont continues.

(V) Montrer que $\mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ n'est pas séparable.

① Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ (e.v.n). On suppose que pour toute suite $x_n \to 0$ $(n \to +\infty)$, on a $(u(x_n))_n$ bornée. Montrer que u est continue. (Raisonner par l'absurde)

② Soit $f : I = [0,1] \longrightarrow E$ (Banach). Pour toute subdivision de $[0,1]$ telle que $0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_n \leq 1$, on associe $\delta = \|f(a_1) - f(a_0)\| + \|f(a_2) - f(a_1)\| + \dots + \|f(a_n) - f(a_{n-1})\|$

Soit $V = \operatorname{Sup} \delta(L)$ quand L parcourt les subdivisions de $[0,1]$ $(V \in \overline{\mathbb{R}}_+)$

Définition : Si ce sup est un nombre fini, f est appelé une fonction à variation bornée.

1°/ Si f est à variation bornée, montrer que $f(I)$ est relativement compacte (raisonner par l'absurde)

2°/ f admet une limite à droite et à gauche.

3°/ $\begin{cases} g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0. \\ g(0) = 0 \end{cases}$ g est dérivable, mais non à variation bornée.

---

① Supposons que u est continue :

u linéaire ; Ainsi : $\forall K > 0 \quad \exists x \quad \|u(x)\| > K\|x\|$

$\forall n > 0 \quad \exists x_n \quad \|u(x_n)\| > n\|x_n\|$

On a ainsi construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On veut construire une suite y_n à partir de x_n qui tende vers 0.

$$y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \cdot \frac{1}{\varepsilon_n} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n \to +\infty \quad (n \to +\infty) \quad (\varepsilon_n > 0)$$

Alors : $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$ (dans E) (on a tout fait pour !)

Et : $\|u(y_n)\| = \frac{\|u(x_n)\|}{\|x_n\|} \cdot \frac{1}{\varepsilon_n} \geq \frac{n}{\varepsilon_n}$ — on prend $\varepsilon_n = \sqrt{n}$ de façon à ce que $\frac{n}{\varepsilon_n} \to +\infty$ $(n \to +\infty)$

Donc $y_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ et $\|u(y_n)\| \to +\infty \Rightarrow (u(y_n))_n$ non bornée.

② E étant un Banach,

$$f(I) \text{ relativement compact} \underset{(\Rightarrow \text{ toujours})}{\overset{(\Leftarrow \text{ car de Banach})}{\Leftrightarrow}} f(I) \text{ précompact}$$

Or $f(I)$ précompact $\Leftrightarrow$ déf. 1

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists F_\varepsilon$ partie finie de $f(I)$ / $d(x, F_\varepsilon) \leq \varepsilon \quad \forall x \in f(I)$

On nie la proposition " $f(I)$ est précompact " :

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall F$ partie finie de A $\quad \exists x_F \quad d(x_F, F) > \varepsilon$

Soit $y_0 \in f(I)$: $y_0 = f(a_0)$

$F_0 = \{f(a_0)\} \quad \exists\, y_1 = f(a_1) \quad \|f(a_1) - f(a_0)\| > \varepsilon \quad (a_1 \neq a_0)$

$F_1 = \{f(a_0), f(a_1)\} \quad \exists\, a_2 \in I \;/\; \begin{cases} \|f(a_2) - f(a_0)\| \geq \varepsilon \\ \text{et} \\ \|f(a_2) - f(a_1)\| \geq \varepsilon \end{cases} \quad a_2 \neq a_1 \neq a_0$

$F_2 = \{f(a_0), f(a_1), f(a_2)\} \quad \exists\, a_3 \in I \;/\; \begin{cases} \|f(a_3) - f(a_0)\| \geq \varepsilon \\ \|f(a_3) - f(a_1)\| \geq \varepsilon \\ \|f(a_3) - f(a_2)\| \geq \varepsilon \end{cases} \quad a_3 \neq a_2 \neq a_1 \neq a_0$

$F_n = \{f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n)\} \quad \exists\, a_0, \dots, a_n \quad V \geq \sum_{i=0}^{n-1} \|f(a_{i+1}) - f(a_i)\| \geq n\,\varepsilon$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad V \geq n\,\varepsilon$ or $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;/\; n_0\,\varepsilon > V$ (Archimède)

D'où l'absurdité.

Remarque : on a un peu triché puisque $a_0 < a_1 < \dots < a_n$. Il faut réordonner les termes :

par exemple : supposons que $a_4 < a_3 < a_0 < a_2 < a_1$

$$\delta(L) = \underbrace{\|f(a_3) - f(a_4)\|}_{>\varepsilon} + \underbrace{\|f(a_0) - f(a_3)\|}_{>\varepsilon} + \underbrace{\|f(a_2) - f(a_0)\|}_{>\varepsilon} + \underbrace{\|f(a_1) - f(a_2)\|}_{>\varepsilon}$$

(car on les trouve dans toutes les inégalités écrites !!.

(Et un peu de Frontignant pour ~~Marie-Christine~~ !) chauffer les oreilles fragiles de Darboux-Jack

① Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $\int_0^1 f(x)\, x^n \, dx = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f \equiv 0$.

① <u>Solution</u>

Co. du th. de Stone-Weierstrass : $f = \lim P_n$

$$\forall n \quad \int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0 \iff \int_0^1 P(x) . f(x)\, dx = 0 \quad \forall P \in \mathbb{R}[x]$$

On a donc $\int_0^1 P_n(x) f(x)\, dx = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 P_n(x) f(x)\, dx = 0$

Montrons que $\| P_n f - f^2 \| \to 0 \quad (n \to +\infty)$

On a : $\sup\limits_{x \in [0,1]} | P_n(x) f(x) - f^2(x) | \leq \sup | f(x) | . \sup | P_n(x) - f(x) | \to 0$

Il y a donc conv. unif. de $P_n f$ vers f^2, d'où : $\int_0 f^2(x)\, dx = 0 \Rightarrow f^2 = 0$

$\Rightarrow f = 0$

(car f continue)

(cf. th intégration $\int_0^1 |f|^2 dx = 0 \iff f = 0$ p.p)

② $[0,1]^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ continue

$$0 = \iint_{0,0}^{1,1} x^p y^q f(x,y)\, dx\, dy \qquad \forall p, q \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad f = 0\ ?$$

<u>Solution</u>

On écrit $I = \int_0^1 x^p \underbrace{\left(\int_0^1 y^q f(x,y)\, dy \right)}_{g_q(x)} dx = 0$

et l'on applique 2 fois le ①.

③ E, F compacts

$\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E) = \{ \text{fcts cont. de } E \to \mathbb{R} \}$

$\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(F) = \{ \text{fcts cont. de } F \to \mathbb{R} \}$

Soit $u \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$ et $v \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(F)$. On note $u \otimes v$ le produit tensoriel de u par v.

Montrer que $\mathcal{C}(E) \otimes \mathcal{C}(F)$ est dense dans $\mathcal{C}(E \times F)$.

<u>Solution</u> :

Tout revient à montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E \times F) \ \exists u_1, \dots, u_n \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E) \ \exists v_1, \dots, v_n \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(F) \text{ tq } \left| f(x,y) - \sum_{i=1}^{n} u_i(x) v_i(y) \right| < \varepsilon \quad \forall (x,y) \in E \times F$$

* A-t-on, $(x,y) \neq (x',y')$ étant donnés, $\exists f \in A$ / $f(x,y) \neq f(x',y')$ $\quad A = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E) \otimes \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(F)$

On a $x \neq x'$ ou $y \neq y'$

$$u_{x'} : \begin{array}{l} x \longmapsto d(x,x') \\ E \longrightarrow \mathbb{R} \end{array} \qquad \begin{cases} u_{x'}(x) \neq 0 \\ u_{x'}(x') = 0 \end{cases}$$

On prend $g(x,y) = u_{x'}(x) \cdot 1_y$

* Montrons que A contient les constantes : $1 = 1_x \otimes 1_y$

Appliquons la remarque faisant suite au théorème de Stone-Weierstrass sous la forme réelle : A est dense dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E,F)$ $\quad$ (E,F compacts)

$A = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E) \otimes \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(F)$

Théorème de Stone - Weierstrass (cf. Dieudonné)

beaucoup utilisé

① Montrer que $\mathcal{C}\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas séparable (NB : Montrer l'existence de $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ non dénombrable, $\|f_\lambda - f_\mu\| = 1$ dès que $\lambda \neq \mu$)

② Soient $a_1, \dots, a_n$ n points distincts deux à deux de $[0,1]$.

1°/ Montrer que $(x \mapsto |x-a_k| = g_k(x))$ $k=1,\dots,n$ est une famille libre dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

2°/ Déduire que la fonction $g(x,y) = |x-y|$ ne peut s'écrire comme somme finie du type $\sum_{i=1}^{n} v_i(x)\, w_i(y)$

Solution

①

Preuve de la NB : $\exists P$ dénombrable P dense

$\forall \lambda \quad f_\lambda \in \overline{P}$

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{4}$ $\quad \exists x_\lambda \in P \;/\; \|f_\lambda - x_\lambda\| \leq \frac{1}{4}$

Ainsi $\Lambda \xrightarrow{h} P$

$\lambda \longmapsto x_\lambda$ h est injective (autrement dit, Λ se plonge dans P)

↓

$\mu \neq \lambda \quad \|f_\mu - x_\mu\| \leq \frac{1}{4}$

Si $h(\lambda) = h(\mu) \Leftrightarrow x_\lambda = x_\mu$ alors $\|f_\lambda - f_\mu\| \leq \|f_\lambda - x_\lambda\| + \|x_\lambda - f_\mu\|$

$\|f_\lambda - f_\mu\| \leq \frac{1}{2}$ ce qui contredit $\|f_\lambda - f_\mu\| = 1$

Λ se plonge dans $P \Rightarrow P$ non dénombrable.

Remarque 1 : Même raisonnement pour $L^\infty(\mathbb{R}^{[0,1]})$. On prend $\chi_{[0,\lambda]} = f_\lambda$.

Alors $\left\{ \|f_\lambda - f_\mu\|_\infty = \sup |\chi_{[0,\lambda]} - \chi_{[0,\mu]}| = 1 \right.$ $\lambda \neq \mu$ $\quad \lambda \in \Lambda$ non dénombrable.

Remarque 2 : E séparable $\Omega_\lambda \,/\, \bigcup \Omega_\lambda = E \quad \lambda \in \Lambda$

et si $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu = \emptyset \quad (\lambda \neq \mu)$

Alors Λ est dénombrable.

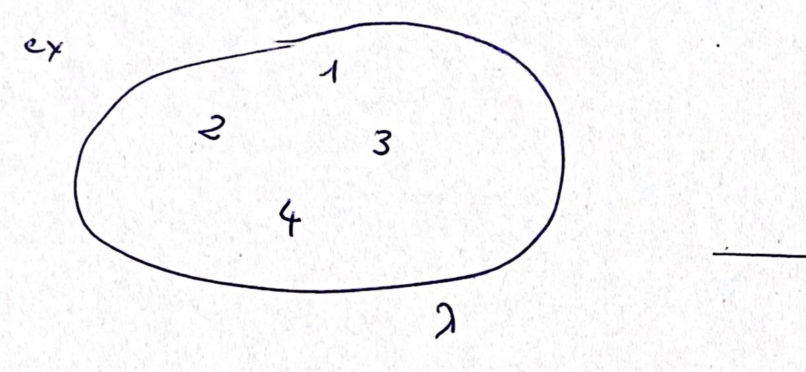
(cf. TD 5 n°1)

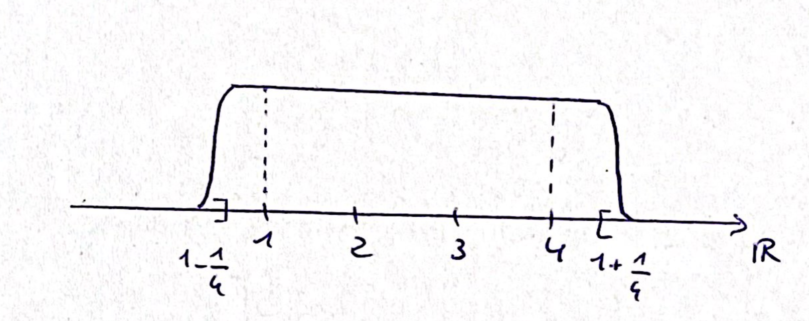
Remarque 3 : $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}\, \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\mathbb{N}$ $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

(ensembles dénombrables) Card = . non dénombrables.

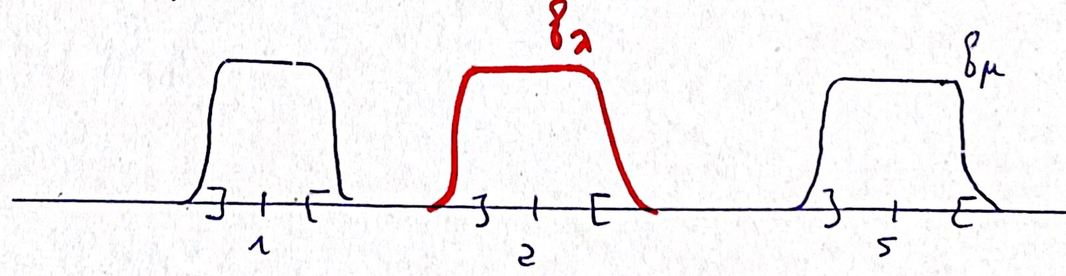
Retour à l'exercice





Soit $\lambda = \{n, n \in \mathbb{N}\}$ alors définissons $\begin{cases} f_\lambda \equiv 1 & \text{sur } V_{\frac{1}{4}}(n) = V(n) \\ f_\lambda \equiv 0 & \text{sur } \complement \bigcup_{n \in \lambda} V(n) \end{cases}$

(ces fonctions ainsi définies existent bien car on peut les construire. cf cours de distribution : $\chi_{[a-\frac{\varepsilon}{2},\, b+\frac{\varepsilon}{2}]} * \rho_p(x)$ convient et c'est une régularisation de la fonction caractéristique)



Si $\lambda \neq \mu$, alors $\exists\, n \in \lambda,\ n \notin \mu$. (cf. figure ci-dessus)

et $\|f_\lambda - f_\mu\| \geq 1$ car $|f_\lambda(n) - f_\mu(n)| = 1$

Comme $\|f_\lambda - f_\mu\| \leq 1$ car $0 \leq f_\lambda \leq 1$, on aura $\boxed{\|f_\lambda - f_\mu\| = 1 \quad \forall \lambda, \mu}$

Remarque 4 : Montrer que $\mathbb{R} \simeq [0,1] \simeq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (~~$\mathcal{P}(\mathbb{N})$~~ $\simeq$ = équipotent à)

Remarque 5 : Cet exercice est un contre exemple de la proposition 2 du cours ($\mathcal{C}(C,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(C,\mathbb{C})$ est ~~compact~~ séparable, où C est compact).

↑ (Stone - Weierstrass)

(2)

Rappel : $\mathcal{C}(X \times Y) = \overline{\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(Y)}$

On pourrait ~~cr~~ croire que $\mathcal{C}(X \times Y) = \mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(Y)$? Non. Cet exercice fournit un contre-exemple

1°/ $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

I.M.S.P
77-78

C 1 Topologie Feuille n° 12

(I) Soient E, F deux espaces préhilbertiens sur $\mathbb{R}$ et soit $f : E \to F$ telle que $f(0) = 0$ et $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ $\forall x, y \in E$.
Montrer que f est linéaire. Montrer que ce résultat est faux sur $\mathbb{C}$.

(II) Soit H un espace de Hilbert.
1) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de H, $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$
2) Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par une partie A de H est dense dans H si et seulement si $A^\perp = \{0\}$.

(III) Soit H un espace de Hilbert. (Réciproque du cours)
Soit P une application linéaire continue de H dans H telle que :
$P \circ P = P$ et $\|P\| \leqslant 1$.
1) Montrer que $(\operatorname{Ker} P)^\perp \subset \operatorname{Im} P$
2) En déduire que $\operatorname{Im} P \subset (\operatorname{Ker} P)^\perp$ en utilisant le théorème de projection orthogonale sur $\operatorname{Ker} P$.
3) Montrer que P est un opérateur de projection orthogonale.

(IV) Soit P une application d'un espace de Hilbert H dans lui-même qui est :
- idempotente : $P \circ P = P$
- autoadjointe : $\langle P(x) / y \rangle = \langle x / P(y) \rangle$ $\forall x, y \in H$.

1) Montrer que P est linéaire et continue et que P est un opérateur de projection orthogonale.
2) Soit maintenant $S \in \mathcal{L}(H)$; on dit que S est une symétrie orthogonale si $(I+S)/2$ est une projection orthogonale.
Montrer que les symétries orthogonales ne sont autres que les opérateurs à la fois autoadjoints et unitaires ($\langle S(x) / S(y) \rangle = \langle x / y \rangle$ $\forall x, y \in H$)

(V) Soit E l'ensemble des fonctions continues $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\int_0^\infty f^2(t)\, e^{-t}\, dt < +\infty$

1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

2) Montrer que $\langle f \mid g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)\, g(t)\, e^{-t}\, dt$ définit sur E une structure d'espace préhilbertien.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $L_n(t) = \dfrac{1}{n!}\, e^t \dfrac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t} t^n\right)$.

Montrer que L_n est un polynôme de degré n et que les L_n constituent un système orthogonal dans E. Calculer $\|L_n\|$.

4) Montrer que, pour tout $\alpha \geq 0$, la fonction $e^{-\alpha t} \in E$ et calculer ses coefficients de Fourier $\gamma_{n,\alpha}$ par rapport à (L_n).

5) Montrer que $e^{-\alpha t} = \sum_n \gamma_{n,\alpha} L_n$

6) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - e^{-t}$ et au théorème de Stone-Weierstrass, que les fonctions e^{-nt} ($n \in \mathbb{N}$) constituent un système total dans E.

En déduire que les L_n constituent une base orthogonale de E.

(VI) Soit $E = \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$ et soit $k \in E$.

Pour tout $f \in E$, on pose $Cf(t) = \int_0^1 k(t)\, u^{-1/4} f(u)\, du$.

Montrer que $C \in \mathcal{L}(E)$, calculer sa norme et montrer que C n'a pas d'adjoint qui opère sur E.

(I)

1°/ Dans $\mathbb{R}$

Montrons que f conserve le produit scalaire

$$\langle f(x), f(y)\rangle_F = \langle x, y\rangle_E \quad ?$$

En effet :

$$\langle f(x)-f(y), f(x)-f(y)\rangle = \langle x-y, x-y\rangle$$

$$-2\langle f(x), f(y)\rangle + \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 = -2\langle x,y\rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2$$

car $\|x\| = \|f(x)\|$ (car $f(0)=0$)
et on est dans $\mathbb{R}$, donc $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.

Montrons que f est linéaire

Calculons :

$$\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|^2 = \langle f(\lambda x) - \lambda f(x), f(\lambda x) - \lambda f(x)\rangle$$

$$= \langle \lambda x, \lambda x\rangle + \langle -\lambda f(x), f(\lambda x)\rangle - \lambda\langle f(\lambda x), f(x)\rangle + \lambda^2\langle f(x), f(x)\rangle$$

$$= \lambda^2\langle x,x\rangle - \lambda\langle x, \lambda x\rangle - \lambda\langle \lambda x, x\rangle + \lambda^2\langle x,x\rangle$$

$$= 0$$

Oui.

On fait de même pour : $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|^2$.

(Le raisonnement est donc purement formel)

2°/ Dans $\mathbb{C}$

Prenons $E, F = \mathbb{C}$ et $f(z) = \bar{z}$ non linéaire. ($f(\lambda z) = \bar{\lambda}\bar{z}$)

$f(0) = 0$ $\quad \|\bar{z} - \bar{z}'\| = \|\overline{z-z'}\| = \|z-z'\|$

et

On retiendra 2 méthodes ~~ed~~ classiques :

a) Passer tout de suite en produit scalaire lorsque l'on parle de préhilbertien. (s'attacher aux boyaux des préhilbertiens)

b) $x = 0 \Leftrightarrow \|x\|$



1°/

a) P est linéaire et continue

P est linéaire puisque :

$$\begin{aligned} \langle P(x+\lambda x'), y\rangle &= \langle x+\lambda x', P(y)\rangle \\ &= \langle x, P(y)\rangle + \lambda \langle x', P(y)\rangle \\ &= \langle P(x), y\rangle + \langle \lambda P(x'), y\rangle \\ &= \langle P(x) + \lambda P(x'), y\rangle \end{aligned}$$

$$\forall y \in E \implies P(x+\lambda x') = P(x) + \lambda P(x')$$

P est continue puisque

$$\begin{aligned} \|P(x)\|^2 = \langle P(x), P(x)\rangle &= |\langle x, P(x)\rangle| \\ &\underset{\text{Cauchy Schwarz}}{\leq} \|x\| \, \|P(x)\| \end{aligned}$$

donc $\forall x \in E \quad \|P(x)\| \leq \|x\| \implies \|P\| \leq 1$

b) P = opérateur d'une projection orthogonale

En effet,

$$\left\{ \begin{aligned} &\langle x - P(x), P(y)\rangle = \langle x, P(y)\rangle - \langle P(x), P(y)\rangle \\ &\forall y \in E \qquad\qquad = \langle x, P(y)\rangle - \langle x, \underbrace{P \circ P}_{P}(y)\rangle = 0 \end{aligned} \right.$$

donc $x - P(x) \perp \operatorname{Im} P \qquad \forall x \in E$

2)

$S \in \mathcal{L}(H,H)$ est une symétrie orth. si $\frac{I+S}{2} = P =$ projection orthogonale.

a) 1) S autoadjointe
2) S unitaire } $\Rightarrow$ S = symétrie orthogonale

En effet : montrons que alors $P = \frac{I+S}{2}$ est idempotente et autoadjointe, ce qui prouvera que P est bien une projection orthogonale :

* P est idempotente

$$\left(\frac{I+S}{2}\right) \circ \left(\frac{I+S}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(I + S + S + S \circ S\right) = \frac{I+S}{2} = P$$

car $\langle S(x), S(y) \rangle = \langle x, y \rangle \Rightarrow \langle S \circ S(x), y \rangle = \langle x, y \rangle$ $\forall y \in E$
S autoadj.

$\Rightarrow S \circ S = I$

* P est autoadjointe

$$\left\langle \frac{I+S}{2}(x), y \right\rangle \overset{?}{=} \left\langle x, \frac{I+S}{2}(y) \right\rangle$$

$\Updownarrow$

$\langle S(x), y \rangle = \langle x, S(y) \rangle$ oui car S autoadjointe.

b) S symétrie orthogonale $\Rightarrow$ { 1) S autoadjointe
2) S unitaire

* S est unitaire

$$\langle S(x), S(y) \rangle = \langle 2P - I(x), 2P - I(y) \rangle$$
$$= 4\langle P(x), P(y) \rangle - 2\langle P(x), y \rangle - 2\langle x, P(y) \rangle + \langle x, y \rangle$$
$$= \langle x, y \rangle$$

puisque $2\langle P(x), P(y) \rangle = \langle P(x), y \rangle + \langle x, P(y) \rangle$

$\Updownarrow$

$\underbrace{\langle P(x), P(y) - y \rangle}_{= 0} = \underbrace{\langle x - P(x), P(y) \rangle}_{= 0}$ (th. de proj. de Riesz)

* S est autoadjointe

$$\langle S(x), y\rangle \overset{?}{=} \langle x, S(y)\rangle$$

$$\langle 2P-I(x), y\rangle \overset{?}{=} \langle x, 2P-I(y)\rangle$$

$$\langle P(x), y\rangle \overset{?}{=} \langle x, P(y)\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$-\langle P(x), P(y)-y\rangle + \langle P(x), y\rangle = \langle x, P(y)\rangle + \langle P(x)-x, P(y)\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$-\langle P(x), P(y)\rangle + 2\langle P(x), y\rangle = \langle P(x), P(y)\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle P(x), P(y)\rangle - \langle P(x), y\rangle = 0$$

$$\Updownarrow$$

$\langle P(x), P(y)-y\rangle = 0$ exact car $P(y)-y \perp P(x)$ $\forall y, x \in E$
(th. de projection de F. Riesz.)

CQFD

NB : Ci-dessus, on a montré que

P = projection $\Rightarrow$ P autoadjoint

comme P est forcément idempotent, on a :

$$P = \text{projection} \iff \begin{cases} * \ P \circ P = P \\ * \ \langle P(x), y\rangle = \langle x, P(y)\rangle \end{cases}$$

Conclusion de l'exercice

$$P = \text{projection}^{(\perp)} \iff \begin{cases} * \ P \circ P = P \\ * \ P \text{ autoadjoint} \end{cases}$$

$$S = \text{symétrie}^{(\perp)} \iff \begin{cases} * \ S \text{ unitaire} \iff \langle S(x), S(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in H \\ * \ S \text{ autoadjoint} \end{cases}$$

② 1) $\bullet$ $F \subset \bar{F} \Rightarrow (\bar{F})^\perp \subset F^\perp$

$\Rightarrow (F^\perp)^\perp \subset ((\bar{F})^\perp)^\perp = \bar{F}$ (car th. Riesz)

donc $(F^\perp)^\perp \subset \bar{F}$

$\bullet$ $x \in F^\perp \Rightarrow x \in \bar{F}^\perp$ (facile)

donc $F^\perp \subset \bar{F}^\perp \Rightarrow (F^\perp)^\perp \supset \bar{F}$ oui

2)

Soit F engendré par $A \subset H$.

$(F)^{\perp\perp} = \bar{F}$ (§ 1))

$\Updownarrow$

$F^\perp = \{0\}$ (Th. de projection)

a $F^\perp = A^\perp$ (car $A^\perp \supset F^\perp$ et $A^\perp \subset F^\perp$)

combin. lin. de tout él. de A

donc $A^\perp = \{0\}$

③ H hilbert

$P \in \mathcal{L}(H,H)$ telle que $P \circ P = P$ et $\|P\| \leq 1$

1°/ Montrer que $(\mathrm{Ker}\, P)^\perp \subset \mathrm{Im}\, P$

Soit $x \in (\mathrm{Ker} P)^\perp$ et $P(x)$.

KerP = fermé : on peut appliquer le théorème de projection :

$$H = \mathrm{Ker} P \oplus (\mathrm{Ker} P)^\perp$$

Décomposons P(x) dans cette somme.

~~$P(x) = P(y) + y + z \rightarrow P(x) = P(y) + P(z)$~~ (with $P(y) = 0$)

~~$P(x - z) = 0$~~

$$P(x) = \underbrace{(P(x) - x)}_{\in \operatorname{Ker} P} + \underbrace{x}_{\in \operatorname{Ker} P^{\perp}} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x \in \operatorname{Im} P \\ \Updownarrow \\ x = P(x) \end{cases} \qquad \text{car} \quad x = P(y) \Rightarrow \quad P(x) = P(y) = x$$

Tout revient à montrer que $P(x) - x = 0$ dans (1) :

$$\|P(x)\|^2 = \|P(x) - x\|^2 + \|x\|^2 \qquad \text{(Pythagore)}$$
$$\leq \|x\|^2 \text{ car } \|P\| \leq 1$$

Donc $\|P(x) - x\| = 0 \quad \Rightarrow P(x) = x$ oui.

2°/

Soit $x \in \operatorname{Im} P$ $\quad x = x_1 + x_2 \qquad x_1 \in \operatorname{Ker} P \quad x_2 \in \operatorname{Ker} P^{\perp}$

$$P(x) = x = \underbrace{P(x_1)}_{=0} + P(x_2)$$
(car $x \in \operatorname{Im} P$)

donc ~~...~~ $x = P(x_2)$

(cf 1°) Comme $x_2 \in \operatorname{Ker} P^{\perp} \subset \operatorname{Im} P$, on aura $P(x_2) = x_2$

donc $x = x_2$, d'où ~~P...~~ $x =$ ~~x_2~~ $0 + x$ (décomposition unique. Th. de Riesz)

$$\Downarrow$$
$$x \in (\operatorname{Ker} P)^{\perp}$$

Donc $\operatorname{Im} P \subset (\operatorname{Ker} P)^{\perp}$

3°/ P = <u>opérateur de projection orthogonale</u>

Prenons $F = (\operatorname{Ker} P)^{\perp} = \operatorname{Im} P$. Montrons que $\operatorname{Im} P$ est fermée dans H.

~~①~~. Montrons que $P(x)$ vérifie $\forall y \in$ ~~$\operatorname{Im} P$~~ $H \quad \langle P(x) - x, P(y) \rangle = 0$

a) $\operatorname{Im} P$ fermé dans H

1ᵉ méthode : $\operatorname{Im} P = (\operatorname{Ker} P)^\perp$ et $\operatorname{Ker} P$ fermé $\Rightarrow (\operatorname{Ker} P)^\perp$ fermé

2ᵉ méthode : ~~$x \in \operatorname{Im} P \Leftrightarrow x = P(x) \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker}(I-P)$~~

~~($P^2 = P$ seulement)~~

$\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker}(I-P) =$ ~~$\operatorname{Ker} I$~~

~~car $(I-P)^2 = (I-P) \Rightarrow \operatorname{Im}(I-P) = \operatorname{Ker} I-(I-P)$~~

~~$= \operatorname{Ker} P$~~

b) $\forall y \in H \quad \langle x - P(x), P(y) \rangle = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} P \subset (\operatorname{Im}(I-P))^\perp$

On a $\operatorname{Im}(Id - P) = \operatorname{Ker} P$ car $(Id - P)^2 = (I - P)$

(puisque P projecteur $\Leftrightarrow P^2 = P$ et $x \in \operatorname{Im} P \Leftrightarrow x = P(x) \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker}(I-P)$)

~~Remarque~~:

Donc $(\operatorname{Ker} P)^\perp = (\operatorname{Im}(I-P))^\perp \Rightarrow \operatorname{Im} P \subset [\operatorname{Im}(I-P)]^\perp$

⑤ Soit $E = \{ f$ continue, $f : [0, \infty[\to \mathbb{R} \ / \int_0^\infty f^2(r) e^{-r} dr \} < \infty$

1°/ E = $\mathbb{R}$ - espace vectoriel

* $f \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda f \in E$
* $f_1, f_2 \in E \quad f_1 + f_2 \in E$?

$$\int_0^\infty [f_1 + f_2(t)]^2 e^{-r} dr = \underbrace{\int_0^\infty f_1^2 e^{-r} dr}_{<\infty} + \underbrace{\int_0^\infty f_2^2 e^{-r} dr}_{<\infty} + 2 \int_0^\infty f_1(t) f_2(r) e^{-r} dr$$

Comme $\displaystyle\int_0^\infty |f_1(t) f_2(t)| e^{-r} dr \leq \int_A f_2^2(t) e^{-r} dr + \int_B f_1^2(t) e^{-r} dr$

$$\leq \int_0^\infty f_2^2 e^{-r} dr + \int_0^\infty f_1^2 e^{-r} dr < \infty$$

On a gagné.

(On a choisit $A = \{ t \in [0, \infty[\ / \ |f_1(t)| \leq |f_2(t)| \}$ et $B = \complement_{[0,\infty[}^{A}$

2) $\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(t) g(t) e^{-t} dt$ définit une structure d'espace préhilbertien sur E.

Remarquons que, par un raisonnement analogue à celui du 1), on montre que $\langle f, g \rangle$ est bien défini (c.à.d $\langle f, g \rangle < \infty$)

* $\langle \,,\, \rangle$ est une forme hermitienne sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ bilinéaire

* $\langle \,,\, \rangle$ est positive

En effet $\langle f, f \rangle = \int_0^\infty f^2(t) e^{-t} dt \geq 0$

* $\langle \,,\, \rangle$ est non dégénérée ($\Leftrightarrow$ "définie")

En effet $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_0^\infty \underbrace{f^2(t) e^{-t}}_{\text{continue positive}} dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$ sur $[0, \infty[$.

CQFD

3) Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $L_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t} t^n)$

La formule de Leibnitz donne :

$$\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t} t^n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k e^{-t} (t^n)^{(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k e^{-t} n(n-1)\dots(k+1) t^k$$

d'où : $$\boxed{L_n(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \frac{t^k}{k!}}$$ = polynôme de degré n.

<u>$(L_n)_n$ = système orthogonal dans E</u>

Considérons L_n et $L_m \in E$, et faisons $\langle L_n, L_m \rangle$

Exercice (5)

$E = \{ f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continues $/ \int_0^\infty f^2(t)\, e^{-t}\, dt < \infty \}$

(1) soient f et $g \in E$, $\int_0^\infty (f+g)^2 e^{-t} dt = \int_0^\infty (f^2+g^2+2fg)\, e^{-t} dt$

or $2fg \leq f^2 + g^2$

d'où $\int_0^\infty (f+g)^2 e^{-t}\, dt \leq 2\left(\int_0^\infty f^2 e^{-t} dt + \int_0^\infty g^2 e^{-t} dt\right) < \infty$

donc $f+g \in E$

de façon évidente $\lambda f \in E$

(2) $\langle f | g \rangle = \int_0^\infty fg(t)\, e^{-t}\, dt$ est bien défini d'après ce qui précède.

$\langle f | g \rangle$ est évidement bilinéaire et positive

$\int_0^\infty f^2(t)\, e^{-t}\, dt = 0 \to f \equiv 0$ sur $[0,+\infty[$.

On a donc bien une structure d'espace préhilbertien.

(3) $L_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t} t^n) = \frac{1}{n!} e^t \left[(-1)^n e^{-t} t^n + \dots + n!\, e^{-t}\right]$

$= \frac{(-1)^n}{n!} t^n + \dots + 1$ polynôme de degré n.

$= \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$

$\langle L_n, L_m \rangle = \sum_{k=0}^{m} \overline{a_m} \langle L_n | t^k \rangle$

Calculons donc $\langle L_n, t^k \rangle \ \forall k \leq m$.

$\langle L_n, t^k \rangle = \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t} t^n)\, t^k\, dt = \frac{I_{n,k}}{n!}$

on intègre par parties :

$u(t) = t^k \qquad dv(t) = \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t} t^n)$

$du(t) = k\, t^{k-1} \qquad v(t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e^{-t} t^n)$

$I_{n,k} = \underbrace{\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e^{-t} t^n)\, t^k\right]_0^{+\infty}}_{=0} - k \int_0^\infty \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e^{-t} t^n)\, t^{k-1}\, dt$

en intégrant successivement par parties :

$I = (-1)^k k! \int_0^\infty \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}(e^{-t} t^n)\, dt$

- si $k < n$, $I = (-1)^k k! \left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}(e^{-t} t^n)\right]_0^{+\infty} = 0$
- si $k = n$, $I = (-1)^k k! \int_0^\infty e^{-t} t^n\, dt$

en intègre par parties $= (-1)^n n! \times n!$

d'où $\langle L_n, L_m \rangle = 0 \ \forall n \neq m$ et $\langle L_n, L_n \rangle = (-1)^n n!\, \overline{a_n}$

or $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \to \langle L_n, L_n \rangle = 1 \Rightarrow \| L_n \| = 1$.

④ $\int_0^\infty (e^{-\alpha t})^2 e^{-t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(2\alpha+1)t}\,dt = -\frac{1}{2\alpha+1}\left[e^{-(2\alpha+1)t}\right]_0^{+\infty}$

$= \frac{1}{2\alpha+1} < \infty$ $(\alpha \geq 0)$ donc $e^{-\alpha t} \in E$

$= \| e^{-\alpha t} \|^2$

$\gamma_{n,\alpha} = \langle e^{-\alpha t}, L_n(t) \rangle = \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n)\,dt$

en intégrant par parties

$= \frac{1}{n!}\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e^{-t}t^n) = \frac{\alpha^n}{n!}\int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-t}t^n\,dt$

$= \frac{\alpha^n}{n!}\int_0^\infty e^{-(\alpha+1)t}t^n\,dt$ soit $u = (\alpha+1)t$, $du = (\alpha+1)dt$ }

$= \frac{\alpha^n}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-u}\frac{u^n}{(\alpha+1)^{n+1}}\,du = \frac{1}{n!}\frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^{n+1}} \times n! = \frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^{n+1}}$

$$\boxed{\gamma_{n,\alpha} = \frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^{n+1}}}$$

⑤ d'après ③ les L_n forment un système orthonormal. On veut montrer que c'est un système total.

Montrons que

$M = \| e^{-\alpha t} - \sum_{k=0}^{N}\langle e^{-\alpha t}, L_k\rangle L_k \|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

soit $\| x - \sum_{k=0}^{N}\langle x|a_k\rangle a_k \|^2$ de façon générale

~~$x - \sum_{k=0}^{N}\langle x|a_k\rangle a_k \perp \langle x|a_k\rangle a_k \ \forall k$~~

$\Rightarrow x - \sum_{k=0}^{N}\langle x|a_k\rangle a_k \perp$ à $\sum_{k=0}^{N}\langle x|a_k\rangle a_k$

d'après pythagore

$M = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{N}|\langle x|a_k\rangle|^2$

$= \|e^{-\alpha t}\|^2 - \sum_{k=0}^{N}|\gamma_{k,\alpha}|^2 = \frac{1}{2\alpha+1} - \frac{1}{(\alpha+1)^2}\sum_{k=0}^{N}\frac{\alpha^{2k}}{(\alpha+1)^{2k}}$

$\frac{\alpha}{\alpha+1} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{2k} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}} = \frac{(\alpha+1)^2}{2\alpha+1}$

$\Rightarrow M \to \frac{1}{2\alpha+1} - \frac{1}{2\alpha+1} = 0$

d'où $e^{-\alpha t} = \sum_{n=0}^{\infty}\gamma_{n,\alpha}L_n$. CQFD

5) $I = \int_0^\infty f^2(t)\, e^{-t}\, dt < \infty$

$t \in [0,\infty[\;\longmapsto\; u \in [0,1[$ où $u = 1 - e^{-t}$

$f : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad F : [0,1[\xrightarrow{\text{continue}} \mathbb{R}$
$\qquad\qquad u \longmapsto F(u) = f(t)$

$e^t = \frac{1}{1-u} \Rightarrow t = \ln \frac{1}{1-u}$ donc $F(u) = f\left(\ln \frac{1}{1-u}\right)$

$I = \int_0^1 f^2\left(\ln \frac{1}{1-u}\right)(1-u)\frac{du}{(1-u)} = \int_0^1 F^2(u)\, du < \infty$

On est dans $[0,1]$ compact : Mais $F \in \mathcal{C}_0\,[0,1[$!

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P(u)$ polynôme / $\int_0^1 (F(u) - P(u))^2\, du < \varepsilon^2$

IDEE (cf. Stone-Weierstraß, avec $\|\ \|_\infty$ = Supérieure à toutes les normes)

donc $\int_0^\infty [f(t) - P(1-e^{-t})]\, e^{-t} dt < \varepsilon^2$

On sait que $F \in L^2$. Donc :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists G \in C([0,1]) (= C_c([0,1]))$ / $\int_0^1 (F(u) - G(u))^2\, du < \varepsilon^2$

(cela puisque $C_c(X)$ dense dans $L^p(X)$ où $X \subset \mathbb{R}^k$, $1 \leq p < \infty$, vu en intégration. On prends $p = 2$

Comme $G \in C([0,1])$, on peut appliquer le théorème de Stone-Weierstraß à G :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P$ polynôme tel que $\int_0^1 [G(u) - P(u)]^2\, du < \varepsilon^2$

Par suite, $\forall \varepsilon,\ \exists P$ / $\|F - P\|_2 < 2\varepsilon$

Ainsi, $\forall f \in E \quad \exists P$ polynôme / $\int_0^\infty [f(t) - \underbrace{P(1-e^{-t})}_{Q(e^{-t})}]^2 e^{-t}\, dt < \varepsilon$

(polynome de e^{-t}.)

Donc

$e^{-nt} \in E$ et $Q(e^{-t})$ = ~~poly~~ combinaison linéaire de e^{-nt} et approche $f \in E$ quelconque

Donc $(e^{-nt})_n$ est un système total.

Soit A le sev de E engendré par les e^{-nt} $(n \in \mathbb{N})$. On a $\bar{A} = E$ (quest. 6))
Soit B le sev de E engendré par les L_n $(n \in \mathbb{N})$. On a $\bar{B}^A = A$ (car question 5) ; tout élément de A est limite d'éléments de B)

Donc $\bar{B}^A = \bar{B} \cap A \Rightarrow A \subset \bar{B} \Rightarrow$ comme $\bar{A} = E$ on a $\bar{B} = E \Leftrightarrow B$ dense dans E.

$\bar{B}^A = A$

Les L_n forment bien une base orthogonale de E

⑥ $E = \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$ et $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$ Soit $k \in E$

$\forall f \in E$ on pose $Cf(x) = \int_0^1 k(x)\, t^{-\frac{1}{4}} f(t)\, du$

<u>$C \in \mathcal{L}(E)$</u> ?

<u>Rappel de cours</u> : $H : I \times I \to \mathbb{C}$

$$\begin{cases} u(f) = \int_0^1 H(x,t) f(t)\,dt \\ f \in E \end{cases}$$

$H^*(x,t) = \overline{H(t,x)}$

Différence dans cet exercice : tout se passera mal puisque $H : [0,1] \times]0,1] \to \mathbb{C}$

$$Cf(x) = k(x) \int_0^1 t^{-\frac{1}{4}} f(t)\,dt$$

$$\int_0^1 t^{-\frac{1}{4}} |f(t)|\,dt \leq \left(\int_0^1 t^{-2\frac{1}{4}}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 f^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

selon Holder

$< \infty$ car critère de Riemann

$$\leq \sqrt{2} \left(\int_0^1 f^2(t)\,dt\right)^{1/2} \qquad (1)$$

C est linéaire d'évidence.

$$\|Cf\|^2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 k(x)\, t^{-\frac{1}{4}} f(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 \overline{k(x)}\, t^{-\frac{1}{4}}\, \overline{f(t)}\,dt\right)$$

$$= \left(\int_0^1 |k(x)|^2\,dx\right)\left(\int_0^1 t^{-\frac{1}{4}} f(t)\,dt\right)^2$$

$$\leq 2\, \|f\|_2^2\, \|k\|_2^2$$

cf (1)

Donc $\boxed{\|C\| \leq \sqrt{2}\, \|k\|_2}$

Inversement

" " $f(t) = t^{-\frac{1}{4}}$

$$\frac{\|Cf\|^2}{\|f\|^2} = \frac{4\, \|k\|_2^2}{2} = 2\, \|k\|_2^2$$

$$\frac{\|Cf\|}{\|f\|} = \sqrt{2}\, \|k\|_2$$

ce qui donne (seulement) une idée de la démonstration

$\left(\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{4}} = n^{\frac{1}{4}}$

$t^{-\frac{1}{4}}$

f_n

1

0 $\quad \frac{1}{n} \quad 1$

Alors

$$\frac{\|Cf_n\|^2}{\|f_n\|^2} = \frac{\|f_n\|_2^2 \left(\int_0^1 t^{-\frac{1}{4}} f_n(t)\,dt\right)^2}{\int_0^1 f_n^2(t)\,dt}$$

$$\int_0^1 t^{-\frac{1}{4}} f_n(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{n}} t^{-\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{4}} ~~f_n(t)~~\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= n^{\frac{1}{4}} \left[\frac{4}{3} t^{\frac{3}{4}} \right]_0^{\frac{1}{n}} + (-2) \left[t^{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{1}{n}}^1$$

$$= n^{1/4} \frac{-4}{3 n^{+\frac{3}{4}}} + (-2)\left(1 - n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= n^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{-4}{3}\right) - 2 + 2n^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3} n^{-\frac{1}{2}} + 2$$

or, par un calcul similaire : $\int_0^1 f_n^2(t)\,dt = 2 - n^{-\frac{1}{2}}$

Donc

$$\frac{\|Cf_n\|^2}{\|f_n\|^2} = \frac{\|k\|_2^2 \left(-\frac{2}{3} n^{-\frac{1}{2}} + 2\right)^2}{2 - n^{-\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2\|k\|_2^2$$

Donc $\boxed{\|C\| = \sqrt{2}\,\|k\|_2}$

<u>C n'a pas d'adjoint</u>

C^* $f, g \in E$

$$\langle Cf, g \rangle = \langle f, C^* g \rangle$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 k(x) t^{-\frac{1}{4}} f(t)\,dt \right) \overline{g(x)}\,dx = \int_0^1 f(x) \overline{C^* g}(x)\,dx$$

$$\parallel$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 k(t) x^{-\frac{1}{4}} f(x)\,dx \right) \overline{g(t)}\,dt$$

$$\int_0^1 f(x) x^{-\frac{1}{4}} \int_0^1 k(t) ~~x^{-1/4}~~ \overline{g(t)}\,dt\,dx$$



On aura donc :

$$\int_0^1 f(x)\,\overline{C^*g(x)}\,dx = \int_0^1 f(x)\,\alpha(g)\,x^{-\frac{1}{4}}\,dx = \qquad (1)$$

où $\alpha =$ ~~$x^{\frac{1}{4}}$~~ $\int_0^1 k(t)\,\overline{g(t)}\,dt$

Le seul problème est que $x^{-\frac{1}{4}}\alpha$ n'est pas défini en 0 (puisque $\frac{1}{x^{1/4}}$ non défini en 0), et que $C^*g \in E$ donc défini en 0 !

Prenons
$$\begin{cases} f_n(x) = C^*g(x) - \overline{\alpha(g)}\,x^{-\frac{1}{4}} & \text{pour } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ f_n(x) = C^*g(x) - \overline{\alpha(g)}\,n^{+\frac{1}{4}} & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Alors, en faisant $f_n = f$ dans (1) :

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \left(C^*g(x) - \overline{\alpha(g)}\,n^{\frac{1}{4}}\right)\left(\overline{C^*g(x)} - \alpha(g)x^{-\frac{1}{4}}\right)dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \left|C^*(g)(x) - \overline{\alpha(g)}\,x^{-\frac{1}{4}}\right|^2 dx = 0$$

$\forall n$

$$\left|\int_0^{\frac{1}{n}} \left(|C^*g(x)|^2 - \overline{\alpha(g)}\,n^{\frac{1}{4}}\,\overline{C^*g(x)} - \alpha(g)\,x^{-\frac{1}{4}}\,C^*g(x) + |\alpha(g)|^2 x^{-\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{4}}\right)dx\right|$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{n}} \left(K^2 + K|\alpha(g)|\,x^{-\frac{1}{4}} + |\overline{\alpha(g)}|\,K\,n^{\frac{1}{4}} + |\alpha(g)|^2 x^{-\frac{1}{4}} n^{+\frac{1}{4}}\right)dx$$

où $K = \sup_{x \in I} |C^*g(x)|$ (car C^*g continue sur le compact I.)

$$\frac{K^2 + K|\alpha(g)|\,n^{\frac{1}{4}}}{n} + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{4}}\left(K|\alpha(g)| + |\alpha(g)|^2 n^{\frac{1}{4}}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

fainiante
feignante
fainéant

TD TOPO 12 bis

I.M.S.P
77-78

C₁ Topologie

Feuille n° 12

× (I) Soit H un espace de Hilbert, $(x_n)_{n\geq 0}$ étant une suite de points de H qui converge vers un point x de H. Monter qu'on a :

(*) $\lim_{n\to\infty} \langle x_n - x, y\rangle = 0 \quad \forall y \in H.$

Trouver un espace de Hilbert dans lequel il y a une suite qui vérifie (*) mais non convergente.

Théorème de Lax Milgram

× (II) Soit H un Hilbert, B une forme sesquilinéaire continue sur H.

1°) Monter qu'il existe un opérateur A linéaire continu de H tel que :

$$B(x,y) = \langle x, Ay\rangle \quad \forall x, \forall y \in H.$$

2°) Monter que si B est hermitienne alors A est auto-adjoint.

3°) On suppose que B est hermitienne et vérifie de plus :

$$B(x,x) \geq \alpha \|x\|^2 \quad \text{où} \quad \alpha > 0.$$

Monter que A est un opérateur inversible.

× (III) Trouver un espace de Hilbert H et $\gamma : [0,1] \longrightarrow H$ continue vérifiant : pour toute suite croissante $t_0 = 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq 1 = t_{n+1}$ on ait $\langle \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}), \gamma(t_{i+2}) - \gamma(t_{i+1})\rangle = 0 \quad \forall i \in [0, n-1]$.

(IV) Soit H un hilbert, F un fermé convexe. On désigne par $P_F : H \longrightarrow F$ telle que $d(x,F) = \|x - P_F(x)\|$. Monter que $\|P_F(x) - P_F(y)\| \leq \|x-y\| \quad \forall x,y$ dans H.

× (V) Soit $E = L^1([0,1])$ et $F = \{f \in E \ / \ \int_0^1 f(x)dx = 1\}$.

1°) Monter que F est un convexe fermé et calculer $d(0,F)$.

2°) Monter que $d(0,F)$ peut être réalisé par plusieurs points de F. Conclure ?

× (VI) Soit une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments d'un espace H de Hilbert. On pose S_n l'espace vectoriel engendré par $\{x_1, \dots, x_n\}$.

De plus on suppose que $d(x_{n+1}, S_n) = \|x_{n+1} - x_n\|$ pour tout $n \geq 1$ (*)

Montrer que si $y_1 = x_1$ et $y_n = x_n - x_{n-1}$ pour $n > 1$ on a :

a) les vecteurs y_n sont orthogonaux deux à deux et

$x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$.

b) $\|x_1\| \leq \|x_2\| \leq \cdots \leq \|x_n\| \leq \cdots$ a lieu.

c) si $(z_n)_{n \geq 1}$ est un système orthogonal, alors la suite des $(x_n)_{n \geq 1}$ tel que : $x_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ vérifie l'hypothèse (*)

(VII) Soit H un hilbert et A un opérateur linéaire continu de H.

On pose $\rho(A) = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$.

i) Montrer que $\rho(A) = \|A\|$ si $A = A^*$

ii) Trouver un exemple pour lequel $\rho(A) \neq \|A\|$.

× (VIII) Soit $H = \ell^2(\mathbb{N}) = \{ (x_n)_{n \geq 0} \,/\, \sum_{n \geq 0} |x_n|^2 < +\infty \}$. Sur H on considère l'opérateur $A : x \longmapsto Ax$ tel que $(Ax)_n = x_{n+2} + r x_{n+1} + x_n$

où r étant un nombre fixé.

i) Montrer que A est continue

ii) Calculer $\dim \operatorname{Ker} A$

à sauter { iii) Peut-on caractériser $\operatorname{Im} A$? (difficile).

iv) Peut-on trouver un opérateur B continu de H tel que :

$$BA = I + N$$

où N est un opérateur continu de H et de rang fini ; ——

× (IX) Soit H l'espace des fonctions analytiques sur $\mathbb{R}$ et telles que $\int_0^\infty e^{-x^2} |f(x)|^2 dx < +\infty$; On munit H du produit

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty e^{-x^2} f(x)\, g(x)\, dx$$

i) que peut-on dire de H ?

ii) Peut on trouver un système orthogonal dans H ?

① Soit E un espace de Banach et A un opérateur linéaire continu sur E tel que :

$$\|Ax\| \geqslant \alpha \|x\| \qquad \forall x \in E \quad \text{avec } \alpha > 0$$

Montrer que $\operatorname{Im} A$ est fermé dans E

② Soit H un espace de Hilbert, B une forme sesquilinéaire continue sur H.
Montrer que pour tout $y \in H$, la forme linéaire $x \mapsto L(x) = B(x,y)$ est continue.
En déduire qu'il existe A opérateur linéaire continu sur H tel que :

$$B(x,y) = \langle x, Ay \rangle \qquad \forall x, \forall y \in H$$

③ Soit $H^1(\mathbb{R}) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}), f' \in L^2(\mathbb{R}) \}$, $(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f\bar{g} + \int_{\mathbb{R}} f'\bar{g}'$

Montrer que $H^1(\mathbb{R})$ est un Hilbert.

---

① $\overline{\operatorname{Im} A} \subset \operatorname{Im} A$?

Soit $y \in \overline{\operatorname{Im} A}$, alors $\exists\, y_n \in \operatorname{Im} A$ / $\lim y_n = y \in \overline{\operatorname{Im} A}$

$y_n = A(x_n)$

$\alpha \|x_n - x_m\| \leqslant \|A(x_n - x_m)\|$

$\alpha \|x_n - x_m\| \leqslant \|y_n - y_m\|$ montre que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E.

Donc $x_n \to x$ dans E (Banach)

$$\begin{cases} y_n = A(x_n) & n \to +\infty \\ \text{donc} \\ y = A(x) \end{cases}$$

$y \in \operatorname{Im} A$

CQFD

③

1) e.v.n

2) préhilbertien

* forme hermitienne : oui

* positive : oui

* non dégénérée $\int_{\mathbb{R}} f^2 dx + \int_{\mathbb{R}} f'^2 dx = 0$

$\Updownarrow$ $\Rightarrow \|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ dans L^2

$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f^2 dx = 0 \\ \int_{\mathbb{R}} f'^2 dx = 0 \end{cases}$ ~~$\Leftrightarrow f = 0$ p.p et $f' = 0$ p.p~~

~~$\Leftrightarrow \dot{f} = \dot{0}$ dans $L^1(\mathbb{R})$~~

3) hilbertien

H^1 est complet ? Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy pour $H^1(\mathbb{R})$

$$\|f_n - f_m\| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

$$\|f_n - f_m\|^2 = \|f_n - f_m\|_2^2 + \|f_n' - f_m'\|_2^2$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \|f_n - f_m\|_2^2 \leq \|f_n - f_m\|^2 \\ \|f_n' - f_m'\|_2^2 \leq \|f_n - f_m\|^2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\begin{cases} (f_n)_n \text{ est de Cauchy dans } L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow f_n \text{ converge dans } L^2 \text{ vers } f \in L^2 \\ (f_n')_n \quad " \quad " \quad L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow f_n' \text{ converge dans } L^2 \text{ vers } g \in L^2 \end{cases}$

Reste à prouver que $g = f'$. En effet, si c'est vrai $\|f_n - f\|_2^2 = \underbrace{\|f_n - f\|^2}_{\to 0} + \underbrace{\|f_n' - f'\|^2}_{\to 0}$ (α)

Correction du (3)

Théorème d'intégration : $\begin{cases} f \in L^2(X) \\ g \in L^2(X) \end{cases} \Rightarrow f \cdot g \in L^1(X)$

et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ (cf. Schwartz)

et $L^2(X)$ est un Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_X f\bar{g} \, d\mu$

(NB : f' désigne non pas la dérivée de f, mais la fct associée à la distribution $(T_f)'$, car on peut toujours dériver une distribution !)

S. (*) $L^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$f_n \to f$ dans L^2 $\Rightarrow$ $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Car : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\Downarrow$ $\varphi \in L^2$ $\quad \left| \int (f_n - f)\varphi \right| \leq \int |f_n - f||\varphi| \, dx$

$\leq \|f_n - f\|_2 \, \|\varphi\|_2$ (Cauchy-Schwarz) $\to 0$ $(n \to +\infty)$

On a le résultat suivant : $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T \Rightarrow T'_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T'$

• Comme $\begin{cases} f_n \to f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \\ f'_n \to g \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \end{cases} \Rightarrow f' = g$

f' : dérivée au sens des distributions

La dérivée f' peut donc se représenter par $g \in L^2$.

CQFD

NB : Ce raisonnement est très courant en analyse numérique, et vous en ferez de pareils en C3 !

② $H \to \mathbb{C}$

y fixé $\quad x \mapsto B(x,y) = L(x)$

On sait que $|B(x,y)| \leq K_1 \|x\| \|y\|$, donc $|L(x)| \leq \underbrace{K_1 \|y\|}_{K} \|x\|$

donc L est continue, et $\|L\| \leq K_1 \|y\|$

Voir cours

Ainsi $\quad y \longmapsto L_y$

$H \longmapsto H'$

$\forall \ell \in H' \quad \exists ! a \in H \quad \ell(x) = \langle x, a \rangle$ avec $\|\ell\| = \|a\|$
(cf. isométrie)

$L_y \in H' \quad \|L_y\| \leq K \|y\|$

$\downarrow$

$\exists ! A(y) \in H$ / $L_y(x) = \langle x, A(y) \rangle$ avec $\|L_y\| = \|A(y)\| \leq K \|y\|$
un point

* A est bien linéaire :

① On applique Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x_n - x, y\rangle| \leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0\ (n\to+\infty)} \|y\|$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - x, y\rangle = 0 \quad \forall y\in H$

Contre-exemple :

$\ell^2(\mathbb{N}) = \{(a_n) / \sum |a_n|^2 < \infty\} \qquad \langle a, b\rangle = \sum a_n \bar{b}_n$

Soit $e_n = (0, \dots, \underset{n^{-}\text{place}}{1}, 0, \dots)$ la base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$ (c.à.d système orthonormal total dans ℓ^2)

Alors prenons $x_n = e_n$ et $x = 0$

$$\|x_n\| = 1 \not\to 0 \quad (n\to+\infty)$$

Et pourtant : $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, a\rangle = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\bar{a}_n}_{a_n \text{ car } a_n\in\mathbb{N}} = 0$ car $\sum \bar{a}_n$ absolument convergente.

NB : Si H espace de hilbert possède une base dénombrable hilbertienne, alors H est de "même type" que de $\ell^2(\mathbb{N})$

②

1°/

* $Ay_1 + Ay_2 = A(y_1+y_2)$

$$\langle x, A(y_1+y_2)\rangle = B(x, y_1+y_2) = B(x, y_1) + B(x, y_2) = \langle x, A(y_1)\rangle + \langle x, A(y_2)\rangle$$

de même pour $A(\lambda y)$

* continue

2) B hermitienne $\Rightarrow$ A auto-adjoint. En effet :

$$\langle x, Ay\rangle = B(x,y) = \overline{B(y,x)} = \overline{\langle y, A(x)\rangle} = \langle A(x), y\rangle$$

3) Si B est hermitienne et $B(x,x) \geq \alpha \|x\|^2$ où $\alpha > 0$, on dit que B est "<u>coercitive</u>"

Alors A est inversible ?

On a : $B(x,x) \geq \alpha \|x\|^2 \Rightarrow \|Ax\| \geq \alpha \|x\|$ (Cauchy-Schwartz)

$\Downarrow$

A est injective

A inversible $\in \mathcal{L}(H,H) \Leftrightarrow A$ isomorphisme $\Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ bijective} \\ A \text{ et } A^{-1} \text{ continues} \end{cases}$

Si l'on montre que A est surjective, on aura montré que A est inversible puisque le th. de l'inverse continue permet d'affirmer que A^{-1} est continue (Rappel ; E Banach, si $T \in \mathcal{L}(E)$ et si T bijective, alors T^{-1} est continue).

$a \mapsto J_a = \langle a, .\rangle$

N Benets $\quad H \xrightarrow{A} H$

$\neq \begin{cases} H' \xleftarrow{A^*} H' \simeq H \text{ (car } H = \text{Hilbert)} \\ H^* \xleftarrow{{}^tA} H^* \end{cases}$

$\underbrace{H'}_{\text{lin. cont}} \subset \underbrace{H^*}_{\text{lin. seulement}}$

(et $H' = H^*$ en dimension finie)

Rappelons la relation algébrique $\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$

D'après un exercice vu précedemment (TD du 2/3/78) A est surjective car :

$\mathrm{Im}\, A$ est un fermé : on peut appliquer le th. de Riesz.

On peut donc écrire que $H = \mathrm{Im}\, A \oplus (\mathrm{Im}\, A)^\perp$

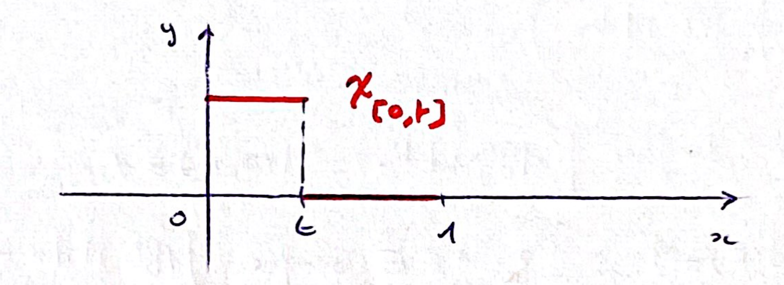
Or $\mathrm{Ker}\, A^* = (\mathrm{Im}\, A)^\perp$ car $A = A^*$

donc $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, A^*$
$\quad \shortparallel$
$\{0\}$

Donc $\boxed{H = \mathrm{Im}\, A}$

③ Indications : prendre $H = L^2([0,1])$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \bar{g}\, dx$

et $\gamma : [0,1] \longrightarrow H$
$\quad t \longmapsto \gamma(t) = \chi_{[0,t]}$



Soit $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1 = t_{n+1}$ une suite croissante quelconque.

Alors

$$\langle \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}), \gamma(t_{i+2}) - \gamma(t_{i+1}) \rangle = \int_0^1 (\chi_{[0,t_i]} - \chi_{[0,t_{i-1}]}) \overline{(\chi_{[0,t_{i+2}]} - \chi_{[0,t_{i+1}]})}\, dx$$

$$= \int_0^1 \chi_{[t_i, t_{i+1}]} \cdot \chi_{[t_{i+1}, t_{i+2}]}\, dx$$

$$= 0 \quad \text{oui.}$$

④

⑤ $E = L^1([0,1])$ $F = \{ f \in E \,/\, \int_0^1 f(x)\,dx = 1 \}$

1°/ F est convexe

$f, g \in F$ $0 < \alpha < 1$

$$\int_0^1 (\alpha f + (1-\alpha) g)(x)\,dx = \alpha \int_0^1 f\,dx + (1-\alpha)\int_0^1 g\,dx = \alpha + (1-\alpha) = 1$$

· F fermé

On considère $\varphi : E \to \mathbb{C}$
$f \mapsto \int_0^1 f(x)\,dx$ φ est linéaire continue.

Donc $F = \varphi^{-1}(1)$ = fermé (F = variété linéaire hyperplane fermée car φ continue)

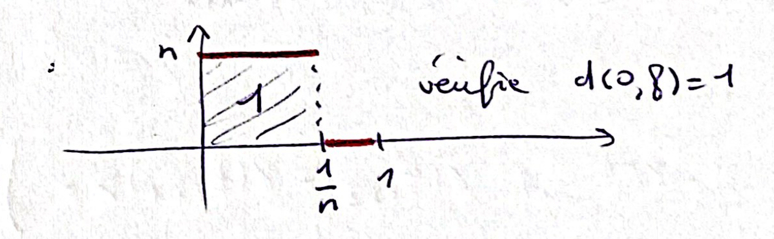
Calcul de $d(0,F)$

$$d(0,F) = \inf_{f \in F} \left(\int_0^1 |f(x)|\,dx \right)$$

Comme $\left| \int_0^1 f(x)\,dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx$, $d(0,F) \geq 1$

Montrons que $d(0,F) = 1$: $f = 1 \in E$ vérifie $\int_0^1 |f(x)|\,dx = 1$

2°/ Par exemple, pour les fcts :



vérifie $d(0,f) = 1$

Il y a donc une infinité de fonctions vérifiant $d(0,f) = d(0,F) = 1$. Ces f ne sont pas des projection de E sur F (puisque une projection est unique). Ceci provient du fait que F n'est pas complet. En effet $L^1([0,1])$ n'est pas complet un esp. de Hilbert pour la norme definie par le produit scalaire

⑥

a)

Rem : S_n = fermé (s.e.v. de dim finie) ⇒ on peut donc lui appliquer le th. de projection.

$$d(x_{n+1}, S_n) = \|x_{n+1} - x_n\| \Rightarrow x_n = P_{S_n}(x_{n+1})$$

$$y_{n+1} = x_{n+1} - x_n = x_{n+1} - P_{S_n}(x_{n+1}) \perp S_n \quad \text{(Th. de projection de F. Riesz)}$$

$$x_{n-1} = P_{S_{n-1}}(x_n) \Rightarrow x_{n-1} \in S_{n-1} \subset S_n \Rightarrow x_{n-1} \in S_n \Rightarrow x_n - x_{n-1} = y_n \in S_n$$

Donc y_n et y_{n+1} sont orthogonaux.

Pour y_n et y_m $(n \neq m)$ et $m \geq n+1$ par exemple, on a $x_{m-1} = P_{S_{m-1}}(x_m)$

$$\left.\begin{array}{l} y_m = x_m - x_{m-1} \perp S_{m-1} \\ \text{or } y_n \in S_n \subset S_{m-1} \Rightarrow y_n \in S_{m-1} \end{array}\right\} \Rightarrow y_n \perp y_m$$

On aura aussi $x_n = y_1 + \dots + y_n$. (facile)

b) $x_n = x_{n-1} + y_n \qquad x_{n-1} = y_1 + \dots + y_{n-1}$

$y_n \perp y_i \quad \forall i \neq n$ et en particulier $y_n \perp x_{n-1}$

Donc, par pythagore : $\|x_n\|^2 = \|x_{n-1}\|^2 + \|y_n\|^2 \geq \|x_{n-1}\|^2$

c)

$x_n = z_1 + \dots + z_n$

Montrons que l'on a bien $x_n = P_{S_n}(x_{n+1}) \Leftrightarrow x_{n+1} - x_n \perp S_n$

$$x_{n+1} - x_n = z_{n+1}$$

$\forall y \in S_n \qquad y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$

$$= \alpha_1 z_1 + \alpha_2 (z_1 + z_2) + \dots + \alpha_n (z_1 + \dots + z_n)$$

et $z_{n+1} \perp z_i \quad \forall i \neq n+1$ donc $z_{n+1} \perp y \quad \forall y \in S_n$ c.à.d. $x_{n+1} - x_n \perp S_n$

⑧ $H = \ell^2(\mathbb{N})$

$A : H \longrightarrow H$

$x \longmapsto A(x)$ où $(Ax)_n = x_{n+2} + r x_{n+1} + x_n$ (r fixé)

[C'est un problème "ouvert" car on n'a pas encore répondu aux questions]

i) A est continue (on sait que A est linéaire)

$$\left(\sum_{n\geq 0} |y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|x\|$$

$\exists C \,/\, \|Ax\| \leq C\|x\|$?

On a $|y_n|^2 \leq (|x_{n+2}| + |r||x_{n+1}| + |x_n|)^2$

donc $\left(\sum_{n\geq 0} |y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{n\geq 0} (|x_{n+2}| + |r||x_{n+1}| + |x_n|)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

Rappel : $\left(\sum_{n\geq 0} (a_n+b_n)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|a+b\|$ où $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ $(a_n, b_n \geq 0)$

$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ (voir inégalité de Minkowski)

Donc $\left(\sum_{n\geq 0} |y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \underbrace{\left(\sum_{n\geq 0} |x_{n+2}|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq \|x\| \text{ (m̂ raisons)}} + \underbrace{\left(\sum_{n\geq 0} |r|^2 |x_{n+1}|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{= \underbrace{|r|(\|x\| - |x_0|^2)}_{\leq |r|\|x\|}} + \underbrace{\left(\sum_{n\geq 0} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{= \|x\|}$

Donc $\begin{cases} y = Ax \\ \|y\| \leq \underbrace{(2+|r|)}_{\text{Cte}} \|x\| \end{cases}$ c.à.d

ii)

$\operatorname{Ker} A = \{x \in H \,/\, Ax = 0\} = \{\overset{\in H}{(x_n)} \,/\, x_{n+2} + r x_{n+1} + x_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$

(la suite (x_n) est appelée suite récurrente solution de l'équation ci-dessus)

Calculer x_n en fonction de n, x_0 et x_1.

$$\dim \operatorname{Ker} A \leq \dim \underbrace{\left\{ (x_n)_{n \geq 0} \;/\; x_{n+2} + a\, x_{n+1} + x_n = 0 \;(1) \right\}}_{= E}$$

$$E \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

$$(x_n) = x \overset{\varphi}{\longmapsto} (x_0, x_1)$$

* φ est linéaire
* φ est bijective

Donc E isomorphe à $\mathbb{C}^2 \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} E = 2$.

Cherchons 2 solutions canoniques de cette e dans E

$x_n = \lambda^n$

$$\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$$

① $\Delta = a^2 - 4 \neq 0$ Alors λ_1 et λ_2

Posons $\begin{cases} x_1 = (\lambda_1^n) \\ x_2 = (\lambda_2^n) \end{cases}$ vérifient (1)

x_1 et x_2 sont indépendantes $\Rightarrow (x_1, x_2) =$ base de E (de dimension 2)

$\forall x \in E$ $\boxed{x = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n}$

② $\Delta = a^2 - 4 = 0$ λ racine double $\begin{cases} x_1 = (\lambda^n) \\ x_2 = (n\lambda^n) \end{cases}$ $\in E$ et vect. indépendants

(le lecteur le montrera).

Alors: $\forall x \in E$ $\boxed{x = \alpha \lambda^n + \beta n \lambda^n}$

<u>Analogie équa. diff.</u> $x = (\alpha + \beta t)e^{\lambda t}$

dans le cas où λ = racine double.

Pour ① $(X^2 - SX + P)$

Si $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \Rightarrow |\lambda_1||\lambda_2| = 1$

Si $|\lambda_1| < 1$ alors $|\lambda_2| > 1$

$x_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n$

converge (suite géométrique) $\Rightarrow (\lambda_1^n) \in H$.

Si $x_n \in H$, alors $(\lambda_2^n) \in H \Rightarrow$ faux car $\sum |\lambda_2|^2$ diverge.

Donc $\beta = 0$ forcément.

Les suites $(x_n)_n \in H$ vérifiant $x_{n+2} + r x_{n+1} + x_n = 0 \quad \forall n$ sont donc de la forme $x_n = \alpha \lambda_1^n$

Donc $\dim \operatorname{Ker} A = 1$ (dans le cas ① bien sûr) où $\begin{cases} |\lambda_1| < 1 \\ \text{ou} \\ |\lambda_2| < 1 \end{cases}$

Si $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$

~~Pour ③~~ ~~$|\lambda_1|^2 = 1$~~ $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ ~~$|\lambda_1| = 1$~~ $\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = e^{i\theta} \\ \lambda_2 = e^{-i\theta} \end{cases}$

on trouve $\dim \operatorname{Ker} A = 0$ $\Rightarrow$ A injective.

Pour ②

$r = \pm 2$ donc $\lambda^2 + 2\lambda = 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

$x_n = (\nu)^n \alpha + \beta n$ où $\nu = \pm 1$ suivant le cas.

donc $(x_n) \in H \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

Alors $\dim \operatorname{Ker} A = 0$

iii)

(5) $$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty e^{-x^2} f(x)\, g(x)\, dx$$

i) C'est défini :

$$\int_0^\infty | e^{-x^2} f(x)\, g(x) |\, dx \leq$$

$\|f\|^2 = 0 \Rightarrow f = 0$?

$$\|f\|^2 = 0 = \int_0^\infty e^{-x^2} |f(x)|^2\, dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [0, \infty[$$

et $f \in H$ analytique dans $\mathbb{R}$

$\Downarrow$ prolongement analytique

$f = 0$ sur $\mathbb{R}$

H est un préhilbertien. Est-il complet ? (Sans réponse)

ii) $f_n = x^n$ ~~a~~' = vecteurs indépendants de E

I.M.S.P.

MATHEMATIQUES

VENDREDI 24 FEVRIER 1978

C 1 - TOPOLOGIE

PREMIER EXAMEN PARTIEL (3 HEURES)

(de 14h à 17h) - Amphi Chimie

I

1/ Soient X un espace métrique, F et F' deux parties de X telles que : $F \cap \overline{F'} = \emptyset = F' \cap \overline{F}$.

AS

Montrer qu'il existe deux ouverts U et U' de X tels que : $F \subset U$, $F' \subset U'$, $U \cap U' = \emptyset$ (considérer la fonction $x \longmapsto d(x, F) - d(x, F')$) .

2/ Soient X un espace topologique séparé, F et F' deux compacts de X tels que $F \cap F' = \emptyset$.

Montrer qu'il existe deux ouverts U et U' de X tels que : $F \subset U$, $F' \subset U'$, $U \cap U' = \emptyset$.

3/ Soient X un espace topologique localement compact et C un compact de X . Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de C relativement compact dans X .

II

Soient X un espace topologique, x et x' deux points de X . On dit que X est connexe entre x et x' s'il ne peut pas être la réunion de deux parties fermées disjointes l'une contenant x et l'autre x' .

1/ Montrer que la relation sur X :

$$x \mathcal{R} x' \iff X \text{ est connexe entre } x \text{ et } x'$$

est une relation d'équivalence.

Les classes sont appelées quasi-composantes connexes de X .

2/ Montrer que toute quasi-composante connexe de X est l'intersection de toutes les parties ouvertes fermées de X contenant un point donné.

3/ Soient Y un autre espace topologique, y et y' deux points de Y. Montrer que si X est connexe entre x et x' et si Y est connexe entre y et y', alors $X \times Y$ est connexe entre (x, y) et (x', y').

AS 4/ Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est fermée, c'est-à-dire que l'ensemble des couples (x, x') tels que $x \mathcal{R} x'$ est fermé dans $X \times X$.

5/ Soient A une partie de X, x et x' deux points de A.

i) Montrer que si A est connexe entre x et x', il en est de même pour toute partie B de X contenant A.

ii) Montrer que si X est un espace métrique et si tout ouvert de contenant A est connexe entre x et x', il en est de même pour A (on pourra raisonner par l'absurde et utiliser (I) 1)).

Soient x un point de X, C la composante connexe de x dans X, C_1 la quasi-composante connexe de x dans X.

6/ Montrer que $C \subset C_1$.

7/ On suppose que $C \neq C_1$ et que X est compact.

i) Montrer qu'il existe deux fermés non vides F et F' de X tels que $C_1 = F \cup F'$, $F \cap F' = \emptyset$, $x \in F$.

ii) Montrer qu'il existe deux ouverts U et U' de X tels que : $F \subset U$, $F' \subset U'$, $U \cap U' = \emptyset$ (utiliser (I) 2))

AS

iii) Remarquer que $C_1 \cap (X - U) \cap (X - U') = \emptyset$ puis trouver une partie K ouverte-fermée de X contenant x telle que :

$$K \cap (X - U) \cap (X - U') = \emptyset .$$

iv) Remarquer que $K \cap U = K \cap (X - U')$, aboutir à une contradiction et conclure en énonçant le résultat ainsi obtenu.

8/ On suppose toujours que X est compact.

Montrer que si C et C' sont deux composantes connexes de X distinctes, il existe une partie G ouverte-fermée de X telle que $C \subset G$ et $G \cap C' = \emptyset$.

9/ On suppose maintenant que X est localement compact et C est compacte. Soit V un voisinage ouvert relativement compact de C dans X ((I) 3)) .

i) Montrer qu'il existe une partie H de $\overline{V}$ ouverte et fermée par rapport à $\overline{V}$ contenant x et ne rencontrant pas la frontière Γ de V dans X .

Pour cela, on pourra :

α) Remarquer que $C \cap \Gamma = \emptyset$

β) Appliquer le résultat de la question 7/ au compact $\overline{V}$.

γ) Conclure grâce à la compacité de Γ .

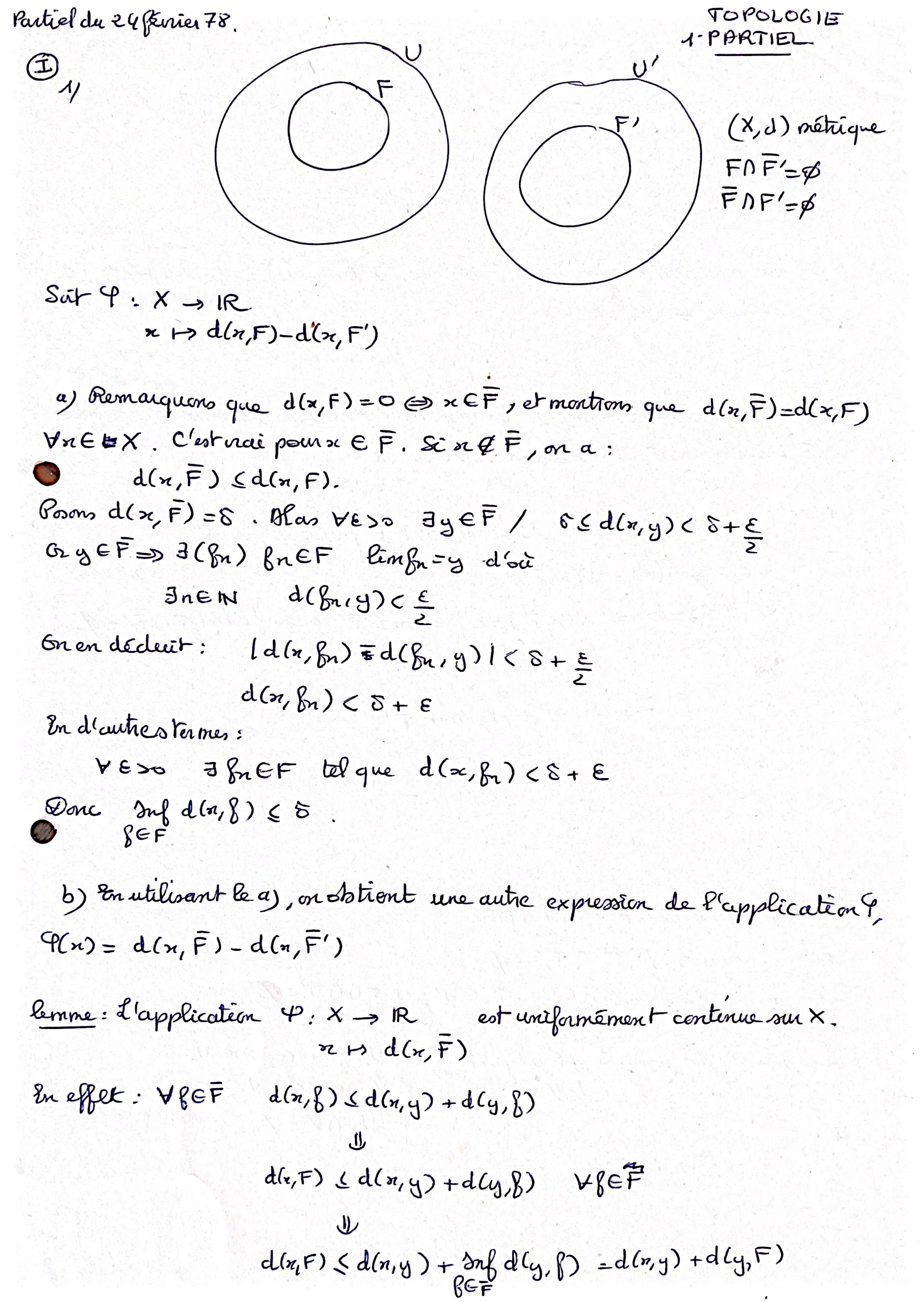
AS

ii) En déduire que H est une partie ouverte-fermée de X contenant x et incluse dans $\overline{V}$.

iii) A l'aide du résultat de la question 7/ montrer que $C = C_1$.

Partiel du 24 février 78.

TOPOLOGIE
1-PARTIEL



(I)

1/

(X,d) métrique

$F \cap \bar{F}' = \emptyset$

$\bar{F} \cap F' = \emptyset$

Soit $\varphi : X \to \mathbb{R}$

$x \mapsto d(x,F) - d(x,F')$

a) Remarquons que $d(x,F) = 0 \iff x \in \bar{F}$, et montrons que $d(x,\bar{F}) = d(x,F)$ $\forall x \in X$. C'est vrai pour $x \in \bar{F}$. Si $x \notin \bar{F}$, on a :

$$d(x,\bar{F}) \leq d(x,F).$$

Posons $d(x,\bar{F}) = \delta$. Alors $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y \in \bar{F}$ / $\delta \leq d(x,y) < \delta + \frac{\varepsilon}{2}$

Or $y \in \bar{F} \Rightarrow \exists (f_n)$ $f_n \in F$ $\lim f_n = y$ d'où

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad d(f_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$$

On en déduit : $|d(x,f_n) - d(f_n,y)| < \delta + \frac{\varepsilon}{2}$

$$d(x,f_n) < \delta + \varepsilon$$

En d'autres termes :

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists f_n \in F$ tel que $d(x,f_n) < \delta + \varepsilon$

Donc $\inf_{f \in F} d(x,f) \leq \delta$.

b) En utilisant le a), on obtient une autre expression de l'application φ,

$\varphi(x) = d(x,\bar{F}) - d(x,\bar{F}')$

<u>Lemme</u> : L'application $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x,\bar{F})$ est uniformément continue sur X.

En effet : $\forall f \in \bar{F}$ $d(x,f) \leq d(x,y) + d(y,f)$

$$\Downarrow$$

$$d(x,F) \leq d(x,y) + d(y,f) \quad \forall f \in \bar{F}$$

$$\Downarrow$$

$$d(x,F) \leq d(x,y) + \inf_{f \in \bar{F}} d(y,f) = d(x,y) + d(y,F)$$

d'où $\quad d(x,F) - d(y,F) \leq d(x,y)$

De la même façon, on montrerait que $d(y,F) - d(x,F) \leq d(x,y)$. D'où :

$$|d(x,F) - d(y,F)| \leq d(x,y)$$

ce qui prouve que φ est lipschitzienne de cte 1.

NB : On n'a pas besoin que F soit fermé dans cette démonstration. le a) est donc ~~ss~~ inutile.

c) $\varphi(x) = d(x,F) - d(x,F')$ est uniformément continue comme la somme de 2 fcts uniformément continues dans X.

d) $\varphi^{-1}(]-\infty, 0[)$ = ouvert U contenant F puisque

$x \in F \Rightarrow \varphi(x) = -d(x,F') \leq 0$.

et $\varphi(x) = 0 \Rightarrow d(x,F') = 0 \Rightarrow x \in \bar{F}'$ absurde car $F \cap \bar{F}' = \emptyset$

Donc $\varphi(x) < 0$.

$\varphi^{-1}(]0, +\infty[)$ = ouvert U' contenant F'.

et $U \cap U' = \emptyset$

CQFD

2°/ X espace topologique séparé.

F et F' compacts / $F \cap F' = \emptyset$.

$\exists U, U'$ ouverts tels que $F \subset U$ $\quad F' \subset U'$ et $U \cap U' = \emptyset$.

facile : utiliser la propriété $\left\{\begin{array}{l} K \text{ compact} \\ x \notin K \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \exists U_x \text{ ouvert } x \in U_x \\ \exists V \text{ ouvert } V \supset K \\ \text{et } U_x \cap V = \emptyset. \end{array}$

IMSP — C_1 Topologie

77-78 — Feuille n° 13 Series de Fourier

I) Introduction et notation : le but de cette feuille est d'étudier sous forme d'exercices quelques propriétés des series de Fourier, dites aussi series trigonometriques. Pour cela on rappelle que $H = \mathbb{L}^2([0,1]; \mathbb{C})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$ est un espace de Hilbert et que la famille $(e_n = e^{i2\pi nt})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2[0,1]$.

Ainsi pour tout f dans H on lui associe ses coéfficients de Fourier :

$$c_n(f) = \langle f, e^{i2\pi nt} \rangle = \hat{f}(n) \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

et on sait : (identité de Parseval) que :

$$\|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \quad \text{pour tout } f \text{ dans } H.$$

En notant par $l^2(\mathbb{Z}) = \{\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 < +\infty\}$ on a le

lemme : L'application de $\mathbb{L}^2([0,1]) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z})$ qui à $f \longmapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une isométrie surjective.

Au cours de la démonstration de ce lemme on avait considéré les sommes :

$$S_n(t) = \sum_{p=-n}^{p=+n} \alpha_p e^{i2\pi pt} \quad \text{avec } (\alpha_p)_{p\in\mathbb{Z}} \text{ dans } l^2(\mathbb{Z})$$

On avait montré : $\exists!\, f \in H$ telleque $\hat{f}(n) = \alpha_n$ et que

$$(1) \qquad f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{i2\pi nt}$$

Remarque : l'égalité (1) doit être prise au sens de la convergence dans $\mathbb{L}^2$; On dit aussi que les $S_n(t)$ convergent vers f "en moyenne quadratique".

Important : $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$ ne veut rien dire a priori. Il faut dire "pour quelle convergence".

Que dire de $S_n(t)$? c'est une suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur tout $\mathbb{R}$ et périodiques de période 1. S'écrit également sous la forme :

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p \geq 1}^{n} (a_p \cos 2\pi pt + b_p \sin 2\pi pt)$$

Q_1 : Pour f dans H et $S_n(f)(t) = \sum_{p=-n}^{p=+n} \hat{f}(p) e^{i2\pi pt}$, trouver les relations entre $\hat{f}(p)$ et a_p, b_p.

<u>Définition</u> : $S_n(f)(t)$ s'appelle somme partielle de la série de Fourier de f dans L^2 et on a $f = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}(p) e^{i2\pi pt}$ dans L^2.

(P) <u>Problème</u> : Pour f dans $L^2[0,1]$, on a $S_n(f)(t) \longrightarrow f(t)$ dans L^2, mais

0°/ A-t-on $S_n(t)$ convergente pour tout t fixé ?

1°/ A-t-on $S_n(t) \longrightarrow f(t)$ ponctuellement ?

2°/ A-t-on $S_n(t) \longrightarrow f(t)$ uniformément ?

On sera amené à faire des hypothèses sur f - bien entendu - pour avoir une réponse affirmative à 0°/ ou 1°/ ou 2°/.

Q_2 : Soit f dans $L^2[0,1]$ telle que : (*) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$. Montrer que la série de Fourier $\sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}(p) e^{i2\pi pt}$ converge absolument et uniformément vers f.

Montrer que si $f \in \mathcal{C}^2[0,1]$ alors (*) est satisfaite.

Remarque : la condition (*) est très difficile à vérifier car elle nécessite le calcul des $c_n(f)$ qui n'est pas facile en général. On fera donc des hypothèses directes sur f qu'on prolongera par périodicité sur tout $\mathbb{R}$ et qu'on note ce prolongement encore par f. On parlera donc de fonctions périodiques de période 1.

II Convergence simple de la série de Fourier :

Soit f une fonction périodique de période 1 et telle que $f_1 \in L^2[0,1]$.

Q_3 | Montrer qu'on a :

(1) $$S_n(t) = \int_0^1 f(t-s)\, K_n(s)\, ds = (f * K_n)(t) \quad \text{avec}$$

(2) $$K_n(t) = \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}, \quad \text{continue}, \quad \lim_{t\to 0} K_n(t) = ?$$

(3) $\int_0^1 K_n(s)\, ds = 1$, K_n est paire changeant de signe, comparer avec les suites régularisantes en $\mathcal{D}'$ ($K_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$).

Q'_3 | Montrer qu'on peut écrire (1) sous la forme :

(1)' $$S_n(t) = \int_0^{1/2} \left[f(t+s) + f(t-s)\right] K_n(s)\, ds \quad ; (3)' \int_0^{1/2} K_n(s)\, ds = 1/2 .$$

L'écriture (1)' suggère de supposer au moins que f est réglée (ie admet une ~~droite~~ limite à droite et une limite à gauche en t), ce que nous supposons dans la suite. ~~et~~ En notant par $\check{f}(t) = \frac{1}{2}\left(f(t+0) + f(t-0)\right)$ montrer qu'on a :

"fonction de Dirichlet"   limite à droite en t

(4) $$S_n(t) - \check{f}(t) = \int_0^{1/2} \left[f(t+s) - f(t+0)\right] K_n(s)\, ds + \int_0^{1/2} \left[f(t-s) - f(t-0)\right] K_n(s)\, ds .$$

Explicitons un seul terme du second membre de (4) :

$$\int_0^{1/2} \left[f(t+s) - f(t+0)\right] K_n(s)\, ds = \int_0^{1/2} \frac{f(t+s) - f(t+0)}{\sin \pi s} \cdot \sin(2n+1)\pi s\, ds$$

On cherchera des hypothèses qui rendront la fonction $\varphi_t(s) = \dfrac{f(t+s) - f(t+0)}{\sin \pi s}$ intégrable sur $[0, 1/2]$ et en utilisant le lemme suivant :

lemme : || Si $f \in L^1[0,1]$ alors $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\, e^{-2i\pi n t}\, dt \xrightarrow[n \to \pm\infty]{} 0$

Montrer le theoreme :

Theoreme (Dirichlet) : Soit f une fonction reglée periodique de periode 1. Soit t un point où f admet une derivée à droite et une derivée à gauche. Alors la serie de Fourier de f converge et a pour somme $\check{f}(t)$.

NB : par définition, $f'_d(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t+0)}{h}$

Applications :

× ① soit $f(t) = \frac{1}{2} - t$ pour $t \in [0, 1]$ et periodique sur $\mathbb{R}$ de periode 1

Montrer que :

$$S_n(t) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\sin 2\pi p t}{\pi p} \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{1}{2} - t & t \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Expliciter pour $t = \frac{1}{4}$, $t = \frac{1}{3}$.

× ② Soit $f(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$ sur $[0, 1]$ et de periode 1

Montrer qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n t}{\pi^2 n^2} = t^2 - t + \frac{1}{6} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 1$$

Expliciter pour $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$.

× ③ $f(t) = \cos 2\pi z t$ pour $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$ où $z \in \mathbb{C}$, montrer qu'on a :

$$\frac{2z}{\pi} \sin \pi z \left[\frac{1}{2z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 2\pi n t}{z^2 - n^2} \right] = \cos 2\pi z t, \text{ sur } [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]$$

pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

en particulier pour $t = \frac{1}{2}$ on a :

$$\cot g\, z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2 \pi^2} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

× ④ **Remarque** : Peut-on établir un theoreme analogue à celui du dessus en supposant que f est holderienne :

$$\exists\, \alpha \in]0, 1] : \quad |f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^{\alpha}, \ \forall x, y.$$

III/ Sur le problème de la convergence uniforme des $S_n(t)$:

<u>Remarque</u> : Comme $S_n(t)$ sont continues et si $S_n(t) \longrightarrow f(t)$ uniformément alors f est continue. On pourrait croire que cela suffit ! Il existe des fonctions continues pour lesquelles $S_n(t)$ ne convergent pas uniformément.

1°/ Convergence uniforme de $S_n(t)$ vers f en moyenne de Césaro.

On appelle moyenne de Césaro de $S_n(t)$ la moyenne arithmétique des $S_n(t)$:

$$\overline{S}_n(t) = \frac{1}{n+1}\left[S_0(t) + S_1(t) + \dots + S_n(t) \right].$$

Q_1 : Montrer que si f est réglée on a :

$$\overline{S}_n(t) - \check{f}(t) = \int_0^{1/2} \left[f(t+s) + f(t-s) - f(t+0) - f(t-0) \right] \overline{K}_n(s)\, ds$$

avec $\overline{K}_n(s) = \dfrac{1}{n+1}\left[K_0(s) + K_1(s) + \dots + K_n(s) \right]$

Q_2 : Montrer qu'on a :

$$\overline{K}_n(t) = \frac{\sin^2 \pi(n+1)t}{(n+1)\sin^2 \pi t} \geq 0 \ ; \ \overline{K}_n(-t) = \overline{K}_n(t) \dots$$

et que $\overline{K}_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformément sur tout intervalle $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$

En déduire le théorème :

<u>Théorème</u> : Soit f continue sur $\mathbb{R}$ de période 1. Alors $S_n(t)$ convergent uniformément vers f en moyenne de Césaro.

C, Topologie

Feuille n° 14

le but de l'exercice est de trouver des solutions de l'équation de la chaleur en une dimension d'espace :

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] f(t,x) = 0 \quad , t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ \lim_{t \to 0^+} f(t,x) = g(x) \end{cases}$$

1) Trouver toutes les solutions $f(t,x)$ de $\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] f(t,x) = 0$ (1) de la forme $f(t,x) = h(t)\, k(x)$.

2) Soient a_n, b_n deux suites bornées. Montrer que la formule $f(t,x) = \sum_0^\infty e^{-n^2 t}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ définit pour $t > 0$ une fonction f de x et de t, de période 2π en x et qui pour tout $t > 0$ est solution de (1).

3) On suppose que (a_n), (b_n) sont les coefficients de Fourier d'une fonction g de période 2π, $g \in L^1[0, 2\pi]$. Montrer qu'on a :

$$(2) \quad \sum_0^\infty e^{-n^2 t}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} K(t,s)\, g(x-s)\, ds$$

avec $K(t,s) = \frac{1}{2\pi}\left[1 + 2\sum_1^\infty e^{-n^2 t} \cos ns\right]$, vérifier que la famille $K_t(x) = K(t,x)$ sont continues en x, de période 2π et que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_t(x)\, dx = 1 \quad \text{pour tout } t > 0$$

4) On pose pour tout $t > 0$

$$\Phi_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(x + 2k\pi)^2}{4t}}$$

Montrer que Φ_t est une fonction continue, de période 2π et calculer ses coefficients de Fourier.

5) En déduire de 4) qu'on a $\Phi_t(x) = K_t(x)$.

6/ Deduire de 5) que la famille $(K_t)_{t>0}$ sont positives, et que si $0<a\leq\pi$ on a :

$$\underset{a\leq|x|\leq\pi}{\mathrm{Max}}\ K_t(x) \longrightarrow 0 \quad \text{si } t\to 0 \quad (t>0)$$

7) Soit $f(t,x)$ definie par la formule (2). Montrer que si g est continue alors on a :

$$\lim_{t\to 0^+} f(t,x) = g(x)$$

Cette convergence étant uniforme par rapport à x sur $\mathbb{R}$.

8) Quelle est la solution au probleme suivant

- Trouver une fonction des 2 variables x et t, continue dans le demi plan fermé $t\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$, de periode 2π en x, solution du probleme (*) où g est supposé continue, de periode 2π.
- Que devient cette solution lorsque $t\to+\infty$

9) Peut-on refaire la même étude pour l'equation de Schrodinger :

$$(**)\begin{cases} \left[\dfrac{1}{\sqrt{-1}}\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right] f(t,x) = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0^+} f(t,x) = g(x) \end{cases}$$

10) Peut-on résoudre le probleme (*) en remplaçant la condition $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t,x) = g(x)$ par :

$$\lim_{t\to 0^+} f(t,\cdot) = g \quad \text{dans } L^2$$

(1) Équation de la chaleur $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f(t,x) = 0$)

1) $f(t,x) = h(t)\, k(x)$ h est C^1 et k est C^2.

donc $h'(t) \cdot k(x) = h(t)\, k''(x) \Rightarrow \frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{k''(x)}{k(x)}$ (2)

On cherche une solution non nulle $\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}$ / $k(x_0) \neq 0$. Alors ;

$h'(t) \cdot k(x_0) = h(t)\, k''(x_0)$ $\forall t > 0 \Rightarrow h'(t) = \underbrace{\frac{k''(x_0)}{k(x_0)}}_{\doteq \lambda} h(t)$ $\forall t > 0$

$h(t) = A e^{\lambda t}$, ce qui justifie l'écriture (2).

Pour que 2 fcts soient égales partout par rapport à 2 variables séparées, il faut qu'elles soient constantes, d'où : (2) $\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{k''(x)}{k(x)} = \lambda = \text{cte}$

On est ramené aux 2 problèmes : $\begin{cases} h'(t) = \lambda h(t) \\ k''(x) = \lambda k(x) \end{cases}$ qui sont des problèmes de v.p.

et de v.p. par rapport aux opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

$\begin{cases} h'(t) = \lambda h(t) \Rightarrow h(t) = \alpha e^{\lambda t} \\ k'' - \lambda k = 0 \Rightarrow r^2 - \lambda = 0 \text{ racines } r_1 \text{ et } r_2 \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \Rightarrow k(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x} \end{cases}$

On cherche les solutions périodiques, seulement. On impose donc la condition

$k(-\pi) = k(\pi) \Rightarrow A(e^{r_1 \pi} - e^{-r_1 \pi}) = B(e^{-r_2 \pi} - e^{r_2 \pi})$ où $r_1 = -r_2$.

$\Rightarrow A = B$ ou $e^{r_1 \pi} = e^{-r_1 \pi}$

$\Rightarrow \begin{cases} A = B & (3) \\ \text{ou} \\ e^{r_1 \pi} = e^{-r_1 \pi} & (4) \end{cases}$

On a : (4) $\Leftrightarrow e^{2 r_1 \pi} = 1 \Leftrightarrow 2 r_1 \pi = k i 2\pi \Leftrightarrow r_1 = ik$ $(k \in \mathbb{Z})$

d'où $r_1^2 = \lambda = -k^2$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\begin{cases} h_k(t) = \alpha_k e^{-k^2 t} \\ k_k(x) = a_k e^{ikx} + b_k e^{-ikx} \end{cases}$ = solution associée à la valeur k.

$$\begin{cases} h_k(t) = \alpha_k e^{-k^2 t} \\ k_k(x) = a'_k \cos kx + b'_k \sin kx \end{cases}$$

Ainsi : $\boxed{f_k(t,x) = e^{-k^2 t}(a''_k \cos kx + b''_k \sin kx)}$ $k \in \mathbb{Z}$

2) $f(t,x) = \sum_0^{\infty} e^{-n^2 t}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Théorème : Soit $(u_n(x))_n$ une série de fonctions absolument et uniformément convergente. Posons $S_n(x) = \sum_0^n u_p(x)$. Sur tout compact $K \subset \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^2$, si $(u_n(x))_n \in \ell^\infty(\Omega)$ alors $u^{(k)}(x) = \sum_0^\infty u_n^{(k)}(x)$

Soient t, x fixés dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, montrons que la série numérique de terme général $e^{-n^2 t}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ est absolument convergente.
$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \| f_n(t,x)$ — pas nécessaire.

$|f_n(t,x)| \leq \underbrace{e^{-n^2 t}}_{} \times 2M$ où $M = \mathrm{Sup}(a_n)_n$ et $\mathrm{Sup}(b_n)$

$\sum$ converge $\Rightarrow \sum |f_n(t,x)| < \infty \Rightarrow$ oui

De plus $|f_n^{(\alpha_1 \alpha_2)}(t,x)| \leq (-n^2)^{\alpha_1} n^{\alpha_2} M e^{-n^2 t}$ et nous avons tjs une série absolument convergente.

Soit $\sum_0^\infty f_n^{(k)}(t,x) = g_k(t,x)$. Montrons que $g_k(t,x) = f^{(k)}(t,x)$

Soit K un compact de Ω, $\exists \alpha > 0 \quad \forall (t,x) \in K \quad t \geq \alpha > 0$

d'où $\sup_{(t,x) \in K} |f_n^{(k)}(t,x)| \leq n^{\alpha_2 + 2\alpha_1} e^{-n^2 \alpha}$

Alors la série est uniformément convergente.

Soit $Pf(t,x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f(t,x)$

$Pf(t,x) = \sum_0^\infty P[\underbrace{e^{-n^2 t} a_n \cos nx + e^{-n^2 t} b_n \sin nx}_{f_n}] = 0$ car $Pf_n = 0 \quad \forall n \geq 0$

3)

Supposons que $\begin{cases} a_n = c_n(g) + c_{-n}(g) \\ b_n = (c_n(g) - c_{-n}(g))\, i \end{cases}$

où $c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\, e^{-inx}\, dx$ avec $g \in L^1([0,2\pi[)$ de période 2π

Montrons qu'alors on a : $f(t,x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(t,s)\, g(x-s)\, ds = (g * K_t)(x)$

où $K(t,x) = \frac{1}{2\pi}\left[~~\int_0^{2\pi} g(x) e^{-inx}~~ 1 + 2\sum_1^{\infty} e^{-n^2 t} \cos nx \right] = K_t(x)$

a_n, b_n sont bornés, encore car, pour $g \in L^1(0,2\pi)$ $\quad c_n(g) = \hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0 g(x) e^{-inx} dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On peut donc appliquer le 2) :

$f(t,x) = \sum_0^{\infty} e^{-n^2 t}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ est solution de (1)

$f(t,x) = a_0 + \sum_1^{\infty} e^{-n^2 t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)(e^{-iny} + e^{iny})\, dy \cos nx \right\} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\, i\,(e^{-iny} - e^{iny})\, dy \sin nx \Big]$

$= a_0 + \sum_1^{\infty} e^{-n^2 t}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos ny \cos nx\, dy + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin ny \sin nx\, dy \right)$

$= a_0 + \sum_1^{\infty} e^{-n^2 t}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)(\cos ny \cos nx + \sin ny \sin nx)\, dy \right)$

$= a_0 + \sum_1^{\infty} e^{-n^2 t} \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} g(x-z) \cos nz\, dz$ $\quad$ or $\int_{x-\pi}^{x+\pi} = \int_{-\pi}^{\pi}$

$= a_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)\left(\sum_1^{\infty} e^{-n^2 t} \cos ny \right) dy$

car on peut intervertir $\sum$ et $\int$ car la série converge absolument et $[-\pi,\pi]$ compact.

$= a_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)\left(\sum_1^{\infty} e^{-n^2 t} \cos ny \right) dy$

or : ~~$f(t,x) =$~~ $a_0 = c_0(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\, dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)\, dy$ par chgt. de variable.

d'où $f(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)\,dy + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)\left(\sum_{1}^{\infty} e^{-n^2t}\cos ny\right)dy$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)\left(1 + 2\sum_{1}^{\infty} e^{-n^2t}\cos ny\right)dy$$

$$\Downarrow$$

$K(t,y) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + 2\sum_{1}^{\infty} e^{-n^2t}\cos ny\right)$ que l'on appelle un noyau.

<u>Montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} K_t(x)\,dx = 1$</u> :

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos ny\,dy = 0 \quad \forall n \geq 1$ et $\int_{-\pi}^{\pi} K_t(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$.

4) $\forall t>0 \qquad \Phi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{(x+2k\pi)^2}{4t}}$

Soit $x \in [0,2\pi)$ $\qquad (x+2k\pi)^2 \geq 4k^2\pi^2 \Rightarrow e^{-(x+2k\pi)^2} \leq e^{-4k^2\pi^2}$ pour $k>0$

~~et la série Φ converge~~.

Pour $k<0$, $(x+2k\pi)^2 = 4\pi^2 k^2\left(1 + \frac{4k\pi x}{4k^2\pi^2} + \frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right) \geq 4\pi^2k^2(1-\varepsilon)$ pour k grand

$$\geq a\,4k^2\pi^2 \quad a>0 \quad |k| \geq N$$

$\Rightarrow \sup e^{-(x+2k\pi)^2} \leq \underbrace{e^{-a4k^2\pi^2}}_{\text{converge}}$

donc Φ converge.

d'autre part : $\Phi_t(x+2\pi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{(x+(k+1)2\pi)^2}{4t}} = \Phi_t(x)$

<u>Coefficients de Fourier de Φ_t</u>

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_t(x)\,e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{(x+2k\pi)^2}{4t}}\,e^{-inx}\,dx$$

Soit $x + 2k\pi = y$ $\quad \left.\begin{array}{l} x = 0 \longrightarrow y = 2k\pi \\ x = 2\pi \longrightarrow y = 2(k+1)\pi \end{array}\right\}$

et $e^{-in(y-2k\pi)} = e^{-iny}$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{k2\pi}^{(k+1)2\pi} e^{-\frac{y^2}{4t}} e^{-iny} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} e^{-iny} dy = e^{-n^2 t} \quad (\leftarrow) ?$$

d'où $\quad S_n(\Phi_t(x)) = c_0(\Phi_t) + \sum_1^n [c_n(\Phi_t)e^{inx} + c_{-n}(\Phi_t)e^{-inx}]$

$$= c_0(\Phi_t) + 2\sum_1^n e^{-n^2 t} \cos nx$$

$$= 1 + 2\sum_1^n e^{-n^2 t} \cos nx$$

D'après Dirichlet : $S_n(\Phi_t(x)) \longrightarrow K_t(x) = \Phi_t(x)$

$$f(t,x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(t,y)\, g(x-y)\, dy \qquad g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(t,y)\, g(x)\, dy$$

car $\int_{-\pi}^{\pi} K(t,x)\, dx = 1$

$$f(t,x) - g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [g(x-y) - g(x)]\, K(t,y)\, dy$$

On suppose que g est continue. On décompose l'intégrale en deux :

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{-a} + \int_{-a}^{a} + \int_{a}^{\pi}$$

$\left\{\begin{array}{l} \left|\int_{-\pi}^{-a}\right| \leq 2M \int_{-\pi}^{-a} K_t(y)\, dy \quad \text{et } \sup K_t(x) \longrightarrow 0 \quad (t \to 0_+) \\ \text{de m̂ pour } \int_a^{\pi} \end{array}\right.$

a est déterminé par l'uniforme continuité de g.

$$|x - y - x| \leq a \Rightarrow |g(x-y) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Alors $\int_{-a}^{a} |g(x-y) - g(y)|\, K_t(y)\, dy \leq \frac{\varepsilon}{3} \int_{-a}^{a} K_t(y)\, dy \leq \frac{\varepsilon}{3} \int_{-\pi}^{\pi} K_t(y)\, dy < \frac{\varepsilon}{3}$

Ceci explique pourquoi on a ~~demandé~~ besoin de montrer que $\sup_{0<a\leq|x|\leq\pi} K_t(x) \to 0$ (laissé au lecteur)

Soit g continue sur $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, et telle que :

$$\begin{cases} g(-1) = g(1) = 0 \\ g(-t) = \overline{g(t)} \quad \forall t \in [-1,1] \end{cases}$$

On la prolonge par périodicité sur tout $\mathbb{R}$. Considérer le noyau $K(t,s) = g(t-s)$

Soit l'opérateur A associé à ce noyau $Af(t) = \int_{-1}^{1} K(t,s)\, f(s)\, ds$ défini sur $C[-1,1]$.

Ainsi $Af(t) = \int_{-1}^{+1} g(t-s)\, f(s)\, ds$.

Montrer que 1°/ A est un opérateur compact (c'est du cours)

2°/ A est un opérateur hermitien

3°/ $f_k = \frac{e^{i\pi k t}}{\sqrt{2}}$ sont des vecteurs propres pour A. Calculer les valeurs propres associées.

Solution : 1°/ et 2°/ ne sont pas faits. Voir le cours.

3°/

$$Af_k(t) = \int_{-1}^{1} g(t-s)\, \frac{e^{+i\pi k s}}{\sqrt{2}}\, ds$$

g a été prolongée par périodicité sur tout $\mathbb{R} \Rightarrow$ on peut faire le changement de variable.

$$Af_k(t) = -\int_{t+1}^{t-1} g(s)\, \frac{e^{+ik\pi(t-s)}}{\sqrt{2}}\, ds = -\frac{e^{ik\pi t}}{\sqrt{2}} \int_{t+1}^{t-1} g(s)\, e^{-ik\pi s}\, ds$$

$$= \frac{e^{ik\pi t}}{\sqrt{2}} \int_{t-1}^{t+1} \underbrace{e^{-ik\pi s}\, g(s)}_{\text{périodique, de période } 2}\, ds$$

$$= \frac{e^{ik\pi t}}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} e^{-ik\pi s}\, g(s)\, ds$$

$$= f_k(t)\, 2\, c_k(g) \quad \left(\text{car } \frac{1}{2}\langle g, f_k\rangle = c_k\right)$$

Soit φ tel que $A\varphi = \lambda\varphi$

$$\begin{cases} \varphi = \sum c_n(\varphi) e^{in\pi t} \\ \lambda\varphi = A\varphi = \sum c_n(\varphi) [illegible] \sqrt{2}\, c_k(g) f_k = \sum c_n(\varphi) c_k(g) \frac{e^{ik\pi t}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

dans $L^2(-1,1) \supset C(-1,1)$

important

$$\Downarrow$$

$$(\lambda - \sqrt{2}\, c_n(g))\, c_n(\varphi) = 0 \Rightarrow \exists n_0 \quad \lambda = c_{n_0}(g)$$

~~et $\forall n \neq n_0 \quad c_n(\varphi) = 0$~~

(Cours et TD)

Séries de Fourier

Soit $L^2(-\pi,\pi) = H$ (hilbert) muni de la norme $\|f\| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$

On a vu que $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ était un système orthonormal total de H. On définit le n^- coefficient de Fourier par $\hat{f}(n) = \langle f, e^{int}\rangle$ (pour $n \in \mathbb{Z}$)

On a alors l'identité de Parseval :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|^2} \quad (1)$$

En particulier, on aura $\sum |\hat{f}(n)|^2 < \infty \Leftrightarrow (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$

Remarque : on a vu (cours Topo) que l'identité de Parseval était

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, a_n\rangle \overline{\langle g, a_n\rangle} \quad \text{Ici } a_n = e^{int}$$

et $f = g$.

Th | L'application $L^2 \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ est bijective.
$f \longmapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$
C'est même une isométrie (c.à.d linéaire et conserve la norme)

Démonstration :

* Surjective : Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ et considérons $g_n = \sum_{p=-n}^{n} \alpha_p e^{ipt}$.

Alors $g_n \in L^2$ (car $e^{ipt} \in L^2$). Montrons que (g_n) est une suite de Cauchy dans l'espace L^2 de hilbert. Alors $g_n \xrightarrow{L^2} g$ et g sera tel que $\hat{g}(n) = \alpha_n$.

La surjectivité sera montrée.

$$\|g_n-g_m\|^2 = \left\| \sum_{p=-m-1}^{-n} \alpha_p e^{ipt} + \sum_{p=m+1}^{n} \alpha_p e^{ipt} \right\|^2 .$$

Les vecteurs $\alpha_p e^{ipt}$ étant tous orthogonaux 2 à 2, on utilise le théorème de Pythagore :

$$\|g_n-g_m\|^2 = \sum_{-m-1}^{-n} |\alpha_p|^2 + \sum_{m+1}^{n} |\alpha_p|^2 \longrightarrow 0 \quad (n,m \to +\infty)$$

Donc $g_n \to g$ dans L^2.

Pour n fixé, $\langle g_m, e^{int}\rangle \longrightarrow \langle g, e^{int}\rangle \quad (m \to +\infty)$

(cf. "continuité" du produit scalaire)

Comme $\langle g_m, e^{int}\rangle = \langle \sum_{p=-m}^{m} \alpha_p e^{ipt}, e^{int}\rangle = \alpha_n$ pour m assez grand,

nous aurons forcément : $\langle g, e^{int}\rangle = \alpha_n$

La surjectivité est démontrée.

* Injective :

$\hat{f}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \iff f \perp e^{int} \quad (\forall n)$

$\iff f \perp$ sous-espace vectoriel engendré par les e^{int} (= dense dans $L^2(-\pi,\pi)$)

$\iff f \perp H \iff f = 0$ car H = hilbertien

* conserve la norme : voir égalité de Parseval
* linéaire : évident.

<u>Autre façon d'écrire une série de Fourier</u>

$$g_n(t) = \sum_{p=-n}^{n} \hat{g}(p) e^{ipt} = \hat{g}(0) + \sum_{p=1}^{n} \left(\hat{g}(-p) e^{-ipt} + \hat{g}(p) e^{ipt}\right)$$

$$= \hat{g}(0) + \sum_{p=1}^{n} \underbrace{(\hat{g}(-p)+\hat{g}(p))}_{a_p} \cos pt + \underbrace{i(\hat{g}(p)-\hat{g}(-p))}_{b_p} \sin pt$$

On peut donc écrire :

$$\boxed{g_n(t) = \hat{g}(0) + \sum_{p=1}^{n} a_p \cos pt + b_p \sin pt \quad \text{où} \quad \begin{cases} a_p = \hat{g}(p) + \hat{g}(-p) \\ b_p = i(\hat{g}(p) - \hat{g}(-p)) \end{cases}}$$

(P) **Problème :** Étant donné $g \in L^2$, on forme $g_n(t) = \sum_{p=-n}^{n} \hat{g}(p) e^{ipt}$. On sait que :

$g_n \xrightarrow{L^2} g$

Étudier 1°/ $g_n(t) \to g(t)$ simplement ?

2°/ $g_n(t) \to g(t)$ uniformément ?

Remarque :

$$g_n(t) = \sum_{p=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) e^{-ips} ds \right) e^{ipt} \qquad \text{Posons } K_n(t) = \sum_{p=-n}^{n} e^{ipt}$$

Alors $g_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) K_n(t-s) ds = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t-s) K(s) ds$

d'où

$$(2) \qquad g_n(t) - g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [g(t-s) - g(t)] K_n(s) ds$$

EXERCICES

① $H = \ell^2(\mathbb{N})$, Montrer que A est un opérateur continu et compact :

$$A : H \longrightarrow H$$
$$x = (x_n) \longmapsto Ax = \left[(Ax)_n = \frac{x_n}{\sqrt{n+1}} \right\}$$

Solution

* $|(Ax)_n|^2 = \frac{|x_n|^2}{n+1} \leq |x_n|^2 \Rightarrow \|Ax\| \leq \|x\| \Rightarrow \|A\| \leq 1$

donc A est continue

* compacte :

A compacte $\Leftrightarrow \left\{ B = \{x / \|x\| \leq 1\} \Rightarrow \overline{A(B)} \text{ compact dans } \ell^2(\mathbb{N}) \right\}$

Attention : B non compact, car on est dans $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et la caractérisation des compacts dans H est donnée par (3). Elle est différente de la caractérisation dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ (!)

(3) Rappel $\quad \ell^p(\mathbb{N}) \left| \begin{array}{l} p \neq 2 \text{ c'est un Banach} \\ p = 2 \text{ c'est un hilbert} \end{array} \right.$

$$K \text{ compact} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } K \text{ fermé borné} \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \quad \sum_{n \geq n_0} |x_n|^2 < \varepsilon \quad (\forall x \in K) \end{cases}$$

$\uparrow$

i) est trivialement vérifié ($K = \overline{A(B)}$ fermé et borné car $A(B)$ borné puisque l'image d'un borné par A continue est un borné)

ii) se montre facilement

$$\forall y \in A(B) \qquad \sum_{n \geq n_0} |y_n|^2 < \epsilon \qquad ?$$

$$y_n = \frac{x_n}{\sqrt{n+1}}$$

On a $$\sum_{n \geq n_0} |x_n|^2 \frac{1}{n+1} \leq \left(\sum_{n \geq n_0} |x_n|^4 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(Hölder)}$$

comme $|x_n|^2 \leq 1 \ (\forall n \in \mathbb{N})$, $\sum |x_n|^4 \leq \underbrace{\sum |x_n|^2 \leq 1}_{\text{car } x \in B}$

donc $$\sum_{n \geq n_0} |x_n|^2 \frac{1}{n+1} \leq \Big(\underbrace{\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{(n+1)^2}}_{\to 0 \ (n_0 \to +\infty)} \Big)^{\frac{1}{2}}$$ indépendamment de x.

CQFD

② Soient $H = L^2(-\pi, \pi)$ et $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$

Pour $f \in H$, on a $\hat{f}(n) = \langle f, e^{int} \rangle$ donné.

1°) Montrer que si $f \in H \quad \exists! \, g \in H \ / \ \hat{g}(n) = \alpha_n \hat{f}(n)$

2°) Soit $T : H \longrightarrow H$, $f \longmapsto g = Tf$. Montrer que $T \in \mathcal{L}(H, H)$

3°) Donner une CNS pour que T soit surjective.

4°) Donner une CNS " " injective.

5°/ Si $h \in \mathbb{R}$ et si $\tau_h f(t) = f(t+h)$ où $\tau_h : H \longrightarrow H$, $f \longmapsto \tau_h f$

Montrer que $T \circ \tau_h = \tau_h \circ T$ $(\forall h \in \mathbb{R})$. Inversement, si $T : H \to H$ commute avec toutes les translations, alors T vérifie : $\exists \alpha \in \ell^\infty \,/\, \widehat{Tf}(n) = \alpha_n \hat{f}(n)$.

Solution :

1°/ $\beta_n = \alpha_n \hat{f}(n)$

Tout revient à montrer que $(\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ (cf. $f \mapsto (\hat{f}(n))_n$ = isométrie surjective)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\beta_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{|\alpha_n|^2 |\hat{f}(n)|^2}_{\leqslant \|\alpha_g\|_\infty^2 |\hat{f}(n)|^2} \leqslant \|\alpha_g\|_\infty^2 \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2}_{\text{car } \hat{f}(n) \in \ell^2(\mathbb{Z})} < \infty$$

2°/ $$\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(n)|^2}_{= \|g\|^2} \leqslant \|\alpha\|_\infty^2 \, \|f\|^2$$

d'après Parseval, puisque $\|g\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(n)|^2$

On trouve bien : $\|Tf\|_2 \leqslant \|\alpha\|_\infty \|f\| \Rightarrow \|T\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \|\alpha\|_\infty$

Retour au problème (P)

Remarque : a) faire des hypothèses uniquement sur f.

b) $\ell^1(\mathbb{Z}) \subset \ell^2(\mathbb{Z})$ et $L^1[0,1] \supset L^2([0,1])$ (réfléchir)

(Q2)

La série est absolument convergente : $\sum |u_n(t)| \leq \sum |\hat{f}(n)| < \infty$

où $u_n(t) = \hat{f}(n) e^{2in\pi t}$

Donc qu'elle converge simplement :

$$\forall t \in [0,1] \quad \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}(p) e^{2i\pi p t} = g(t)$$

On sait que $S_n(f) \xrightarrow{L^2} f$ (voir début de la feuille)

⇓

on peut extraire une sous-suite $S_{n_k}(f) \longrightarrow f$ simplement p.p. t

Donc $S_{n_k}(f)(t) \longrightarrow g(t) \quad \forall t \in [0,1]$

donc $g = f$ p. partout

Convergence uniforme

La série est normalement convergente puisque :

$$\sum \| \hat{f}(p) e^{2i\pi p t} \|_\infty = \sum | \hat{f}(p) | < \infty$$

↑ norme dans $L^2(0,1)$

~~Autre fois~~

Si $f \in C^2[0,1]$, alors (*) est satisfaite : Montrons que

Si $f \in C^2([0,1])$ alors $|c_n(f)| = |\hat{f}(n)| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $(n \to +\infty)$

Preuve :

Il faut montrer que $\dfrac{|\hat{f}(n)|}{\frac{1}{n^2}}$ est borné au voisinage de $(+\infty)$.

$$\frac{\hat{f}(n)}{\frac{1}{n^2}} = n^2 \hat{f}(n) = n^2 \int_0^1 f(t) e^{-i2\pi n t} dt$$

$$= \left[f(t) \frac{e^{-i2\pi n t}}{-i2\pi n} \right]_0^1 - \int_0^1 f'(t) \frac{e^{-i2\pi n t}}{-i2\pi n} dt$$

= 0 car f est périodique de période 1

Donc $n^2 \hat{f}(n) = \underbrace{\int_0^1 f'(t) \, e^{-i2\pi n t} dt}$ $\left(\frac{1}{i2\pi n}\right)$

faire une autre intégration par partie

donc $|\hat{f}(n)| \leq \frac{K}{n^2}$ $(n \to +\infty)$ cqfd

(Q3)

1°/ et 2°/

$$S_n(f)(t) = \sum_{p=-n}^{n} \hat{f}(p) e^{i2\pi p t} = \sum_{p=-n}^{n} \left(\int_0^1 f(s) e^{-i2\pi p s} ds\right) e^{i2\pi p t}$$

$$= \int_0^1 f(s) \left(\sum_{p=-n}^{n} e^{i2\pi p(t-s)}\right) ds$$

Posons $K_n(t) = \sum_{p=-n}^{+n} e^{i2\pi p t} = \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}$ (cf △)

$$S_n(f)(t) = \underbrace{\int_0^1} f(s) K_n(t-s) \, ds = (K_n * f)(t)$$

convolution sur [0,1] $\neq (f * K_n)(t)$ si f non périodique

Heureusement que l'on prend f prolongée par périodicité de période 1

Alors nous aurons bien $f * K_n = K_n * f$

Donc

$$S_n(f)(t) = \int_0^1 f(t-s) \underbrace{K_n(s)} ds$$

(paire) car $K_n(1-s) = K_n(s)$

$$S_n(f)(t) = \int_0^{\frac{1}{2}} [f(t+s) + f(t-s)] K_n(s) \, ds$$

(△) Vérification $\sum_{p=-n}^{n} \underbrace{e^{i2\pi p t}}_{2n+1 \text{ termes}} = e^{-i2\pi n t} \frac{1 - e^{i2\pi(2n+1)t}}{1 - e^{i2\pi t}}$ $t \notin \mathbb{Z}$

~~$= \frac{e^{-i2\pi n t} - e^{i2\pi(n+1)t}}{1 - e^{i2\pi t}}$~~

$$= \frac{\cancel{e^{-i2\pi n t}}\, e^{i\pi(2n+1)t}\left(e^{-i\pi(2n+1)t} - e^{i\pi(2n+1)t}\right)}{e^{i\pi t}\left(e^{-i\pi t} - e^{i\pi t}\right)}$$

$$\boxed{K_n(t) = \frac{\sin \pi(2n+1)t}{\sin \pi t}} \quad (1)$$

(3) $\int_0^1 K_n(s)\,ds = \sum_{p=-n}^{n} \underbrace{\int_0^1 e^{2i\pi p s}\,ds}_{=0 \text{ si } p\neq 0} = \int_0^1 ds = 1$ (trivial)

K_n paire (cf (1))

Ressemble aux suites régularisantes, mais non positive.

$$\lim_{t\to 0} K_n(t) = \frac{(2n+1)\pi}{\pi} = (2n+1)$$

$K_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$ (convergence faible)

$\forall \varphi \in \mathcal{D}$ $\quad \int_0^1 K_n(t)\varphi(t)\,dt \longrightarrow \varphi(0) \quad (n\to+\infty)$

$$\left| \int_0^1 K_n(t)\varphi(t)\,dt - \int_0^1 \varphi(0) K_n(t)\,dt \right| \leq \int_0^1 K_n(t)\left|[\varphi(t) - \varphi(0)]\right| dt$$

$$\leq \int_0^1 \underbrace{\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{\sin \pi t}}\, \sin\pi(2n+1)t\,dt$$

$g(t) \in L^1(0,1)$ (à montrer)

$\quad = \frac{t\,h(t)}{\sin \pi t}$

Lemme $\quad g \in L^1[0,1] \quad \int_0^1 g(s)\sin \lambda s\,ds \to 0 \quad |\lambda| \to +\infty$

Preuve : $\quad \int_0^1 g(s)\, e^{i\lambda s}\,ds \to 0 \quad |\lambda|\to+\infty$

En effet : $\quad g \in L^1(\mathbb{R}) \quad \hat{g}(\xi) \to 0 \quad |\xi| \to \infty$

donc $\boxed{K_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta}$

Toutes les hypothèses que l'on cherche sont celles qui assurent

$$\frac{f(t+s) - f(t-s) - 2f(t)}{\sin \pi s} \in L^1([0,1])$$

de façon à pouvoir appliquer le lemme d'intégration.

④ <u>Remarque</u> : quand f est continue ($\Leftarrow$ fonction höldorienne)

on a $\displaystyle |S_n(f)(t) - f(t)| = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{f(t+s) + f(t-s) - 2f(t)}{\sin \pi s}} \sin(2n+1)\pi s \, ds \right.$

tout revient à montrer que : $\in L^1$?

(Au lieu de prendre la condition de Hölder, on peut se restreindre à la condition : $|f(t+h) - f(t)| \leq C h^\alpha$ $h \geq 0$ $\alpha \in]0,1]$)

On aura :

$$\begin{cases} |f(t+h) - f(t)| \leq C h^\alpha \\ |f(t-h) - f(t)| \leq C h^\alpha \end{cases}$$ où $h \geq 0$ quelconque

$$|f(t+h) + f(t-h) - 2f(t)| \leq 2C h^\alpha \quad \forall h \geq 0$$

Donc $\displaystyle \left| \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2f(t)}{\sin \pi s} \right| \leq \underbrace{\frac{2C s^\alpha}{\sin \pi s}}$

$\displaystyle \sim \frac{2C s^{\alpha - 1}}{\pi}$ intégrable au voisinage de 0 si $1 - \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$ (on a bien choisi $\alpha > 0$)

↑ (pour $s \to 0$)

Ainsi $\displaystyle \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2f(t)}{\sin \pi s} \in L^1([0,1])$

CQFD

① $f(t) = \frac{1}{2} - t \qquad t \in [0,1]$

f est réglée ~~et admet~~.

$$\check{f}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - t \text{ sur }]0,1[\\ 0 \quad t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(prolongé par périodicité)

$$S_n(f)(t) \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - t \quad \text{sur }]0,1[. \\ 0 \quad \text{si } t = 0 \text{ ou } 1 \end{cases}$$

où $S_n(t) = \sum_{p=-n}^{n} \hat{f}(p) e^{i2\pi p t}$ et $\hat{f}(p) = \int_0^1 f(s) e^{-i2\pi p s}$

~~$= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-i2\pi p s}$~~

$= \frac{1}{2i\pi p}$

et $\hat{f}(0) = 0$

$S_n(t) = \sum_{p=1}^{n} \hat{f}(p) e^{i2\pi p t} + \hat{f}(-p) e^{-i2\pi p t} = \sum_{p\geq 1} \frac{1}{\pi p} \frac{e^{i2\pi p t} - e^{-i2\pi p t}}{2i}\Big\} = 2i \sin 2\pi p t$

Expliciter

$\boxed{t = \frac{1}{4}}$ On obtient $\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin \frac{\pi p}{2}}{\pi p}$

$$\begin{cases} \text{si } p \equiv 0 \ [2] & \sin \frac{\pi}{2} p = 0 \\ \text{si } p \equiv 1 \ [2] & \sin \frac{\pi}{2} p = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \end{cases}$$

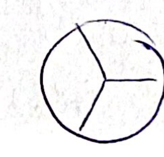
$\frac{p-1}{2} = k$

Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{1}{4}\right) = \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4}}$ (Résultat obtenu par Euler en 1800. On avait ainsi calculé π de cette façon. + 500 termes pour avoir π à 3 décimales)

$\boxed{t = \frac{1}{3}}$

On a $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$$\text{et } \sin \frac{2\pi p}{3} \begin{cases} = 0 & \text{si } p = 3k \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} & p = 3k+1 \\ = -\frac{\sqrt{3}}{2} & p = 3k+2 \end{cases}$$

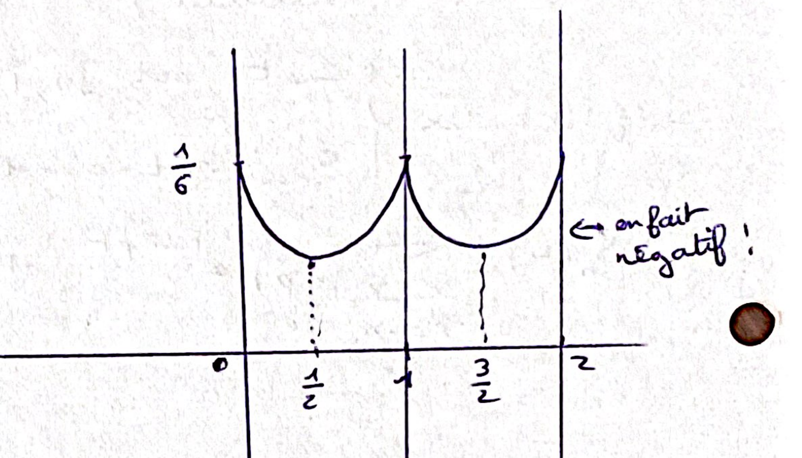


$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$$

② $f(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$ sur $[0,1]$

$f'(t) = 2t - 1$



f est périodique de période $T = 1$.

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$ et

$$S(f)(t) = \sum c_p(f)\, e^{i2\pi p t} = \check{f}(t)$$

(on peut appliquer le théorème de Dirichlet)

où $c_p(f) = \frac{1}{1}\int_0^1 f(s)\, e^{-i2\pi s p}\, ds$

$$= \int_0^1 \left(s^2 - s + \frac{1}{6}\right) e^{-i2\pi s p}\, ds$$

$$= \int_0^1 s^2 e^{-i2\pi s p}\, ds + \underbrace{\int_0^1 -s\, e^{-2i\pi s p}\, ds}_{= \frac{1}{2i\pi p} \text{ (voir le ①)}} + \underbrace{\frac{1}{6}\int_0^1 e^{-i2\pi s p}\, ds}_{=0}$$

Or $\displaystyle\int_0^1 s^2 e^{-i2\pi s p}\, ds = s^2 \frac{e^{-i2\pi p s}}{-i2\pi p}\Big|_0^1 + \frac{-2}{2i\pi p}\underbrace{\int_0^1 -s\, e^{-i2\pi s p}\, ds}_{= \frac{1}{2i\pi p} \text{ (cf ①)}}$

$$= \frac{-1}{2i\pi p} + \frac{-2}{4i^2\pi^2 p^2} = \frac{1}{2\pi^2 p^2} - \frac{1}{2i\pi p}$$

donc $c_p(f) = \frac{1}{2\pi^2 p^2}$ pour $p \neq 0$

et, en particulier, pour $p = 0$ $\quad c_0(f) = \displaystyle\int_0^1 f(s)\, ds = \left[\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} + \frac{1}{6}s\right]_0^1 = 0$

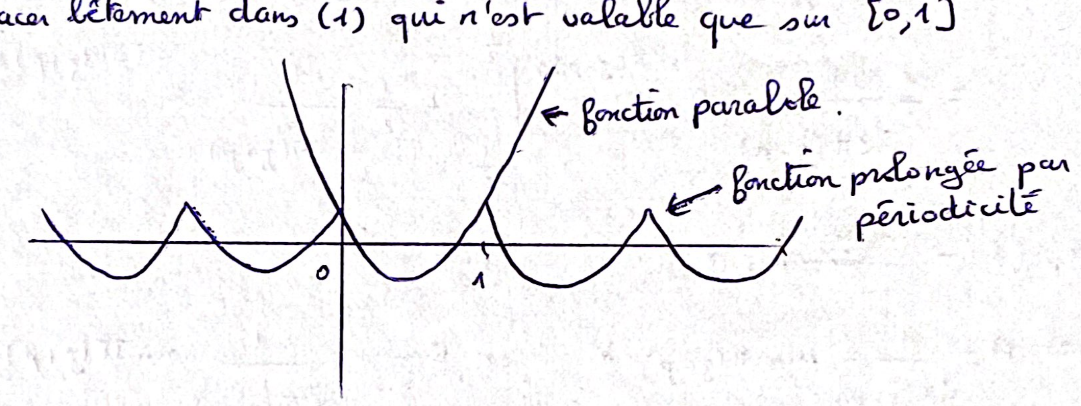
Donc $S(f)(t) = \sum_{p\geq 1} c_p(f)\, e^{i2\pi p t} + \underbrace{c_p(+f)}_{\substack{\parallel \\ c_p(f)}} e^{-i2\pi p t}$

$$= \sum_{p\geq 1} \frac{1}{2\pi^2 p^2} 2\cos 2\pi p t = \sum_{p\geq 0} \frac{\cos 2\pi p t}{\pi^2 p^2}$$

En conclusion, on obtient bien l'égalité :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{\cos 2n\pi t}{\pi^2 n^2} = t^2 - t + \frac{1}{6}} \quad (1)$$

NB : ne pas remplacer bêtement dans (1) qui n'est valable que sur $[0,1]$



* Pour $t=0$, on obtient encore (!) : $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

* Pour $t = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 2n\pi \frac{1}{2} = (-1)^n$ d'où $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}$

③ Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. On considère $f(t) = \cos 2\pi z t$ pour $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$

<u>Rappel</u> : $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

et f est réglée, holomorphe dans t (voir analytique)

On peut appliquer le théorème de Dirichlet.

$\mathbb{C}$; $f(t)$; t ; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$

$$c_p(f) = \int_0^1 \underbrace{f(s)}_{} e^{-i2\pi sp}\, ds$$

fonction périodique sur $\mathbb{R}$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(s)\, e^{-i2\pi sp}\, ds$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \underbrace{\cos 2\pi z s}_{\frac{e^{i2\pi z s} + e^{-i2\pi z s}}{2}}\, e^{-2i\pi sp}\, ds$$

$$c_p(f) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i2\pi(z-p)s}\, ds + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i2\pi(z+p)s}\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{i2\pi(z-p)} e^{i2\pi(z-p)s}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{-i2\pi(z+p)} e^{-i2\pi(z+p)s}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$c_p(f) = A + B$$

et $A = \frac{1}{2\pi(z-p)} \sin \pi(z-p)$ et $B = +\frac{1}{2\pi(z+p)} \sin \pi(z+p)$

$$c_p(f) = \frac{1}{2\pi(z-p)} \sin \pi(z-p) + \frac{1}{2\pi(z+p)} \sin \pi(z+p)$$

comme $\sin \pi(z-p) = \begin{cases} \sin \pi z & \text{si } p = 0 \ (2) \\ -\sin \pi z & \text{si } p = 1 \ (2) \end{cases} = (-1)^p \sin \pi z$

$\sin \pi(z+p) = \begin{cases} \sin \pi z & \text{si } p = 0 \ (2) \\ -\sin \pi z & \text{si } p = 1 \ (2) \end{cases} = (-1)^p \sin \pi z$

d'où $c_p(f) = \frac{(-1)^p \sin \pi z}{z-p} + \frac{(-1)^p \sin \pi z}{z+p}$ $(p>0)$

$= c_{-p}(f)$

$$c_p(f) = \frac{1}{2\pi} (-1)^p \sin \pi z \left(\frac{2z}{z^2-p^2}\right) = \frac{(-1)^p \sin \pi z}{\pi} \cdot \frac{z}{z^2-p^2}$$

$$S(f)(t) = c_0(f) + \sum_{p\geq 1} 2 c_p(f)\, \frac{e^{i2\pi pt} + e^{-i2\pi pt}}{2}$$

$$c_0(f) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$$

donc

$$S(f)(t) = \frac{\sin \pi z}{\pi z} + \sum_{p \geq 1} \frac{2z}{\pi} \sin \pi z \left(\frac{(-1)^p}{z^2 - p^2} \cos 2\pi p t \right)$$

$$= \frac{2z}{\pi} \sin \pi z \left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^p \cos 2\pi p t}{z^2 - p^2} \right)$$

$\downarrow$

$\check{f}(t) = f(t)$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (car f est continue ici)

d'où, sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\boxed{\frac{1}{2z^2} + \sum_{p \geq 1} (-1)^p \frac{\cos 2\pi p t}{z^2 - p^2} = \frac{\pi \cos 2\pi z t}{2z \sin \pi z} \qquad \forall t \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]}$$

Pour $t = \frac{1}{2}$, on a $\cos \pi p = (-1)^p$. On obtient

$$\frac{1}{2z^2} + \sum_{p \geq 1} \frac{1}{z^2 - p^2} = \frac{\pi}{2z} \cdot \operatorname{cotg} \pi z$$

d'où

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{z} + 2z \sum_{p \geq 1} \frac{1}{z^2 - p^2} \right) = \operatorname{cotg} \pi z$$

Par changement de variable :

$$\boxed{\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z^2 - n^2 \pi^2}}$$

III/ **COURS**

Si f est continue sur $\mathbb{R}$ de période égale à 1, en général $S_n(f)(t) \underset{\text{un}}{\not\to} f(t)$ uniformément.

Mais on verra que $f(t)$ peut être approchée uniformément par la moyenne arithmétique (ou "moyenne de Cezaro") de $S_n(f)(t)$

Lemme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et si $\lim u_n = l$ alors $\bar{u}_n = \dfrac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}$ définit une suite $(\bar{u}_n)_n$ appelée "moyenne arithmétique", et l'on a $\lim \bar{u}_n = l$

(NB : inversement, non en général : prendre $u_n = (-1)^n$ qui ne converge pas, et pourtant $\bar{u}_n = \dfrac{1-1+1 \cdots + (-1)^n}{n+1} \to 0 \quad (n \to +\infty)$)

Ici $\bar{S}_n(f)(t) = \dfrac{S_0(f)(t) + \cdots + S_n(f)(t)}{n+1}$

Th | Si f est continue (de période 1) alors

$$\bar{S}_n(f)(t) \longrightarrow f(t) \text{ uniformément sur } \mathbb{R}$$

1°/

On rappelle que $S_n(f)(t) - \check{f}(t) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} [f(t+s) + f(t-s) - f(t+0) - f(t-0)] K_n(s)\,ds$

où $K_n(s) = \dfrac{\sin(2n+1)\pi s}{\sin \pi s}$ = "noyau de Dirichlet".

(Q1) facile

(Q2) $\bar{K}_n(s) = \dfrac{1}{n+1}\Big(\underbrace{\sin \pi s}_{= \operatorname{Im} e^{i\pi s}} + \sin 3\pi s + \cdots + \sin(2n+1)\pi s\Big)(\sin \pi s)^{-1}$

$$\bar{K}_n(s) = \frac{1}{(n+1)\sin\pi s} \, \mathcal{I}m\Big(\underbrace{e^{i\pi s} + e^{i3\pi s} + \dots + e^{i(2n+1)\pi s}}\Big)$$

$$\| \quad e^{i\pi s}\frac{1-(e^{i2\pi s})^N}{1-e^{(i2\pi s)}} \quad N = \text{nbre de termes} = n+1$$

$$\bar{K}_n(s) = \frac{\sin(n+1)\pi s}{(n+1)\sin\pi s}\,\mathcal{I}m\left(e^{i(n+1)\pi s}\right) = \frac{\sin^2(n+1)\pi s}{\sin\pi s}$$

En conclusion :

$$\boxed{\bar{K}_n(s) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\sin^2(n+1)\pi s}{\sin^2\pi s}}$$

(Donc $\bar{K}_n(-t) = \bar{K}_n(t)$)

Démonstration du théorème :

$$\bar{S}_n(f)(t) - f(t) = \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}}[f(t+s)+f(t-s)-2f(t)]\frac{\sin^2(n+1)\pi s}{(n+1)\sin^2\pi s}\,ds}$$

$\to 0$ $(n \to +\infty)$?

indications

On coupe cette intégrale en 2 : $\underbrace{\int_0^{\delta}(\ )}_{\text{petit}} + \int_{\delta}^{\frac{1}{2}}(\ )$ où $\delta(\varepsilon)$

alors $\int_0^{\delta(\varepsilon)}(\ )ds \leq \varepsilon\int_0^{\delta}\bar{K}_n(s)\,ds$ car f continue

$$\leq \varepsilon\underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}}\bar{K}_n(s)\,ds}_{\text{fixe} = \frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

et $\int_{\delta}^{\frac{1}{2}}(\ )\,ds \leq \underbrace{M}_{4\sup_{[0,1]} f}\int_{\delta}^{1/2}\bar{K}_n(s)\,ds \leq \frac{M}{n+1}\int_{\delta}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\underbrace{\sin^2\pi s}_{\text{décroît et continue}}}\,ds \leq \frac{M}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin^2\pi\delta} < \frac{\varepsilon}{2}$ pour n assez grand.

Donc

Preuve au propre : f continue sur $\mathbb{R}$ et périodique 1, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists\,\delta(\varepsilon)>0 \qquad |t-t'|<\delta \Rightarrow |f(t)-f(t')| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Rappels

I) $f_n \in L^1(X)$ (mesurable suffit)

et $\sum_{n\geq 0} \int |f_n| d\mu < \infty$

Alors, si $\sum f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ p.p on a : * $f \in L^1(X)$

* $\int f \, d\mu = \sum \int f_n \, d\mu$

II) Soient $f \in L^2(X)$ $\boxed{\mu(X) < \infty}$ / $\sum_{n\geq 0} |f_n|^2 d\mu < \infty$

alors, si $\sum f_n \to f$ p.p.x, on a * $f \in L^2$

* $\int f \, d\mu = \sum_{n\geq 0} \int f_n(x) \, d\mu$

NB : $\mu(X) < \infty \Rightarrow L^2 \subset L^1$ et $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$